

l'intégrale

Jean-Noël Beury

Physique

Exercices

incontournables

PC • PSI

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés

DUNOD

Éléments sous droits d'auteur

Physique

Exercices incontournables

PC • PSI

Jean-Noël Beury

*Professeur de chaire supérieure
en classes préparatoires au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux).
Membre de jurys de concours*

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Sébastien Fayolle.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058378-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1

Mécanique du solide

- | | |
|--|----|
| 1. Étude cinématique et dynamique d'un solide | 3 |
| 2. Lois de Coulomb du frottement de glissement | 23 |

Partie 2

Électrocinétique

- | | |
|---------------------|----|
| 3. Électrocinétique | 49 |
|---------------------|----|

Partie 3

Ondes

- | | |
|--|-----|
| 4. Ondes dans un milieu non dispersif | 67 |
| 5. Ondes dans un milieu dispersif | 82 |
| 6. Ondes électromagnétiques dans le vide | 91 |
| 7. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique | 116 |
| 8. Dispersion-absorption pour des ondes électromagnétiques | 135 |

Partie 4

Électromagnétisme

- | | |
|---------------------------------------|-----|
| 9. Calculs de champ électromagnétique | 159 |
| 10. Induction électromagnétique | 192 |

Partie 5

Conversion de puissance

- | | |
|---|-----|
| 11. Conversion électromagnétique statique | 225 |
| 12. Conversion électromagnétique | 237 |
| 13. Conversion électronique | 245 |

Partie 6

Diffusion thermique – diffusion de particules

14. Diffusion thermique	255
15. Diffusion de particules	277

Partie 7

Thermodynamique

16. Potentiels thermodynamiques	285
17. Corps pur sous deux phases	291

Partie 8

Optique ondulatoire

18. Interférences	307
19. Diffraction	337

Partie 9

Mécanique des fluides

20. Cinématique et viscosité	365
21. Équation d'Euler et théorèmes de Bernoulli	381
22. Bilans dynamiques et thermodynamiques	395

Partie 10

Acoustique

23. Acoustique	425
Index	440

Avant-propos

Cet ouvrage d'exercices et de méthodes s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques PC et PSI. Il est divisé en vingt-trois chapitres, consacrés chacun à une partie du programme de deuxième année.

Ces 103 exercices incontournables vous serviront aussi bien pour la préparation de l'écrit que de l'oral des Concours d'entrée aux Ecoles d'Ingénieurs.

Dans chacune des 10 parties de l'ouvrage, vous trouverez un sommaire avec la liste des exercices classés par thèmes. Dans le titre de chaque exercice, vous pouvez savoir si l'exercice concerne la filière PC, la filière PSI ou les deux. Un astérisque signale un exercice plus délicat.

Avant d'aborder la résolution de l'exercice, une analyse du problème est proposée systématiquement. Un rappel de cours succinct permet d'insister sur les notions utilisées ultérieurement. Une **méthode systématique de résolution des exercices** vous est proposée.

La solution de l'exercice est alors entièrement décortiquée :

- utilisation de la méthode de résolution ;
- rubrique « Attention » qui identifie les erreurs à éviter ;
- résolution proprement dite.

Bon courage !

Pour bien utiliser cet ouvrage :



Cet encadré met en avant un piège à éviter



Le stylo-plume vous signale l'étape de la rédaction finale.

Partie 1

Mécanique du solide

Plan

1. Étude cinématique et dynamique d'un solide	3
1.1 : Pendule pesant (PC-PSI)	3
1.2 : Machine d'Atwood (PC)	5
1.3 : Yoyo (PC)	9
1.4 : Poulie mobile (PC)	11
1.5 : Barre sur un mur (PC)	15
1.6 : Chaîne sur une table (PC-PSI)	20
2. Lois de Coulomb du frottement de glissement	23
2.1 : Déplacement d'un solide sur un plan horizontal (PC)	23
2.2 : Sphère sur un plan incliné (PC)	29
2.3 : Sphère dans une cuvette (PC)	35
2.4 : Voiture (PC)	41

Étude cinématique et dynamique d'un solide

Exercice 1.1 : Pendule pesant (PC-PSI)

On considère un pendule pesant homogène dans un plan vertical en rotation autour d'un axe fixe Oz , de moment d'inertie J par rapport à cet axe et de masse m . La distance entre O et le barycentre G du pendule est notée a . La liaison pivot est supposée parfaite. A $t = 0$, le pendule pesant est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 \ll 1$ par rapport à la position d'équilibre. Déterminer par deux méthodes l'expression de θ en fonction du temps.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. On va obtenir l'équation différentielle du mouvement par deux méthodes :

- Première méthode : utilisation du théorème du moment cinétique.
- Deuxième méthode : raisonnement énergétique. Le système étant conservatif, il est souvent intéressant en mécanique d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En calculant la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps, on en déduit l'équation différentielle du mouvement.

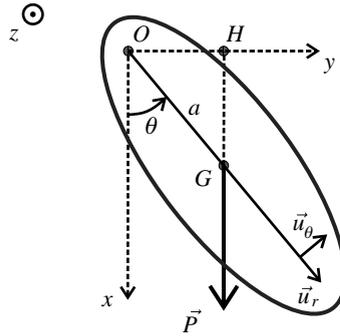
Cours : Liaison pivot parfaite

Quand on a uniquement une rotation autour d'un axe fixe Δ , on dit que l'on a une liaison pivot. Si cette liaison pivot est parfaite, alors le moment de la liaison est nul par rapport à l'axe Δ et la puissance de la liaison est nulle puisque $P = \Gamma_{\Delta}\omega = 0$

Méthode pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide

On utilisera la méthode systématique pour démarrer les exercices de mécanique du solide :

- Définir le référentiel et les axes de projection.
- Effectuer le bilan des actions.
- Déterminer les différents éléments cinétiques.
- Théorèmes généraux de la mécanique : théorème de la quantité de mouvement, théorème du moment cinétique, raisonnement énergétique.



L'axe Δ est l'axe $z'z$ orienté suivant $+\vec{u}_z$. La vitesse angulaire est $\dot{\theta}$ que l'on note également ω .

a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen

b) Bilan des actions :

- Le moment de l'action de la liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- Les forces de pesanteur sont équivalentes pour un solide à une force unique appliquée en G et égale à $\vec{P} = m\vec{g}$. Il reste à déterminer le moment du poids par rapport à l'axe Δ .



Le moment du poids peut se calculer avec la relation : force \times longueur du bras de levier = $mg \times OH = mga \sin \theta$. Il reste à mettre le bon signe devant cette dernière relation. Si $\sin \theta > 0$, le poids a tendance à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. En appliquant la règle de la main droite, le pouce est dirigé suivant $(-\vec{u}_z)$. Il faut donc mettre un signe $-$, soit $\Gamma_{\Delta}(\text{poids}) = -mga \sin \theta$



c) Éléments cinétiques :

Le pendule pesant est de moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ . Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est :

$$\sigma_{\Delta} = J\omega$$

L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$$

d) Première méthode : théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Δ

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\Delta} = -mga \sin \theta$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \sin \theta = 0$$

Si $\theta \ll 1$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$

La résolution de l'oscillateur harmonique est : $\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On en déduit que : $\dot{\theta} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$
 A $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. On en déduit immédiatement que : $A = \omega_0$ et $B = 0$.

D'où

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Le moment de l'action de liaison est nul. L'action de contact est donc conservative.

Le poids dérive d'une énergie potentielle : $E_p = -mgx_G$.



Attention au signe – car l'axe Ox est dirigé vers le bas.



Comme toutes les forces sont conservatives, **le système est conservatif**.
 L'énergie mécanique se conserve donc au cours du temps.

On a donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = cte$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = J \dot{\theta} \ddot{\theta} + mga \dot{\theta} \sin \theta$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$ qui est une solution parasite, on retrouve bien l'équation différentielle précédente :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \sin \theta = 0$$

Exercice 1.2 : Machine d'Atwood (PC)

On considère une machine d'Atwood constituée d'une poulie immobile, d'un fil ne glissant pas sur la poulie et deux masses m et m' . La poulie est en rotation autour de l'axe $\Delta = Oz$, de masse M , de moment d'inertie $J_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R . La liaison pivot est supposée parfaite.

Déterminer l'expression de ω en fonction du temps sachant qu'à $t = 0, \omega = 0$.

Analyse du problème

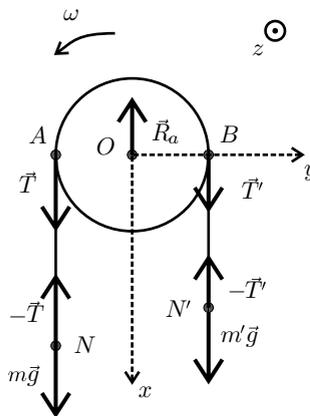
On utilisera la méthode systématique pour démarrer les exercices de mécanique du solide :

- Définir le référentiel et les axes de projection.
- Effectuer le bilan des actions.
- Déterminer les différents éléments cinétiques. On utilisera la formule de Varignon pour deux points appartenant à un même solide.
- Théorèmes généraux de la mécanique : théorème de la quantité de mouvement, théorème du moment cinétique, raisonnement énergétique.



a) Référentiel $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :



On pose $\vec{T} = T\vec{u}_x$ et $\vec{T}' = T'\vec{u}_x$.

Remarque

On considère toujours, sauf indication contraire, un fil idéal, c'est-à-dire de masse nulle et parfaitement souple. Si le fil est tendu, sa tension est uniforme le long du fil. Le fil exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$.



c) Éléments cinétiques :

On a un solide en rotation autour de l'axe Oz repéré par l'angle θ . La vitesse angulaire est $\omega = \dot{\theta}$. Le vecteur rotation est :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$



Bien vérifier avec la main droite que si θ augmente, $\omega > 0$ et le pouce est bien dirigé suivant $(+\vec{u}_z)$.

Remarque

Les vitesses de deux points A et B appartenant à un même solide sont reliées par la formule de Varignon ou relation du champ des vitesses :

$$\vec{v}(A)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(B)_{\mathfrak{R}} + \vec{\omega} \wedge \vec{BA}$$

en notant $\vec{\omega}$ le vecteur rotation du solide par rapport au référentiel \mathfrak{R} .



Il n'y a pas de glissement au point A . La vitesse du fil au point de contact est la même que la vitesse de la poulie au point de contact. Pour la poulie, on peut appliquer la formule de Varignon :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = R\omega \vec{u}_x$$

De même, pour le point B , on a :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -R\omega \vec{u}_x$$

Tous les points du fil ont la même vitesse. On a donc $\vec{v}_A = \vec{v}_N = R\omega \vec{u}_x$ et $\vec{v}_B = \vec{v}_{N'} = -R\omega \vec{u}_x$

d) On a quatre inconnues : T, T', R et ω .

Il faut donc quatre équations : PFD (principe fondamental de la dynamique) au point N , PFD au point N' , théorème de la quantité de mouvement à la poulie et théorème du moment cinétique à la poulie.

PFD au point N en projection sur Ox :

$$mR \frac{d\omega}{dt} = mg - T \quad (eq.1)$$

PFD au point N' en projection sur Ox :

$$-m'R \frac{d\omega}{dt} = m'g - T' \quad (eq.2)$$

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie en projection sur Ox .

La poulie est en équilibre. On a donc :

$$T + T' + Mg - R_a = 0 \quad (eq.3)$$

Théorème du moment cinétique en O appliqué à la poulie :

Bilan des moments des actions extérieures :

- poids $M\vec{g}$ de moment nul puisque la force est appliquée au point O .
- Le moment de l'action de la liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- $\vec{\Gamma}_O(\vec{T}) = \vec{OA} \wedge \vec{T} = -R\vec{u}_y \wedge T\vec{u}_x = RT\vec{u}_z$
- $\vec{\Gamma}_O(\vec{T}') = \vec{OB} \wedge \vec{T}' = R\vec{u}_y \wedge T'\vec{u}_x = -RT'\vec{u}_z$

La projection du théorème du moment cinétique sur l'axe Oz s'écrit :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \frac{MR^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = RT - RT'$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = T - T' \quad (eq.4)$$

Pour finir la résolution, on effectue la combinaison linéaire (4) + (1) - (2) :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = mg - mR \frac{d\omega}{dt} - m'g - m'R \frac{d\omega}{dt}$$

En simplifiant par R , on a :

$$\frac{d\omega}{dt} \left(\frac{MR}{2} + mR + m'R \right) = mg - m'g$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{mg - m'g}{\frac{MR}{2} + mR + m'R} dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\omega = \frac{(m - m')g}{R \left(\frac{M}{2} + m + m' \right)} t$$

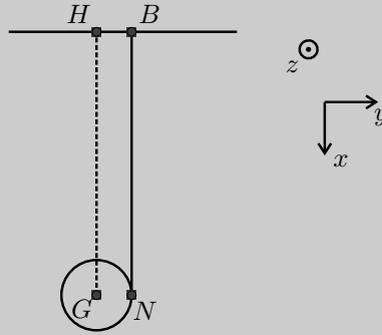
Interprétation physique :

Si $m > m'$, alors $\frac{d\omega}{dt} > 0$. C'est tout à fait cohérent.

L'équation (4) permet de déterminer la réaction du support pour maintenir la poulie à l'équilibre.

Exercice 1.3 : Yoyo (PC)

On considère un yoyo constitué d'une poulie qui se déroule sur un fil. La poulie est de masse M , de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R . Déterminer l'expression de v la vitesse du point G sachant qu'à $t = 0$, $v = 0$.



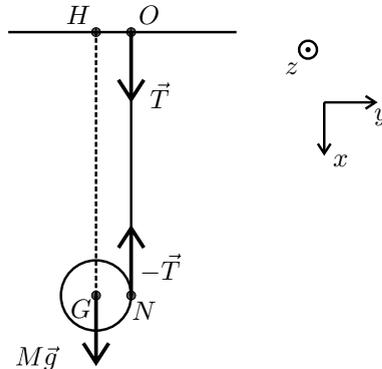
Analyse du problème

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire ω puis en fonction de v .



a) **Référentiel** : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) **Bilan des actions** :



Le fil est supposé idéal. Il exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$. On pose $\vec{T} = T\vec{u}_x$.

c) **Éléments cinétiques** :

Le vecteur rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

La poulie se déroule sur un fil inextensible, donc la vitesse au point O est la même qu'au point N . Comme le point O est immobile, on a donc :

$$\vec{v}_N = \vec{0}$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_N + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{NG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix} = R\omega \vec{u}_x$$

On a donc :

$$v = R\omega$$

Le moment cinétique en G de la poulie est :

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gz} \omega \vec{u}_z = \frac{MR^2}{2} \omega \vec{u}_z = \frac{MR}{2} v \vec{u}_z$$

d) On a deux inconnues : v et T .

Il faut donc deux équations : théorème de la quantité de mouvement à la poulie et théorème du moment cinétique en G appliqué à la poulie.

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie :

Bilan des actions extérieures sur la poulie :

- $M\vec{g}$: poids de la poulie appliqué en G .
- $-\vec{T}$: tension du fil appliquée au point N .

La projection sur Oz du théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - T \quad (eq.1)$$

Théorème du moment cinétique en G appliqué à la poulie :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G(\vec{P}) + \vec{\Gamma}_G(-\vec{T})$$

On a donc : $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GN} \wedge (-\vec{T}) = R\vec{u}_y \wedge (-T\vec{u}_x) = RT\vec{u}_z$

En divisant par M , on a :

$$\frac{MR}{2} \frac{dv}{dt} = RT \quad (eq.2)$$

On en déduit que :

$$T = \frac{M}{2} \frac{dv}{dt}$$

On réinjecte dans l'équation 1 :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - \frac{M}{2} \frac{dv}{dt}$$

Soit :

$$\frac{3}{2}M \frac{dv}{dt} = Mg$$

On sépare les variables :

$$dv = \frac{2}{3}gdt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

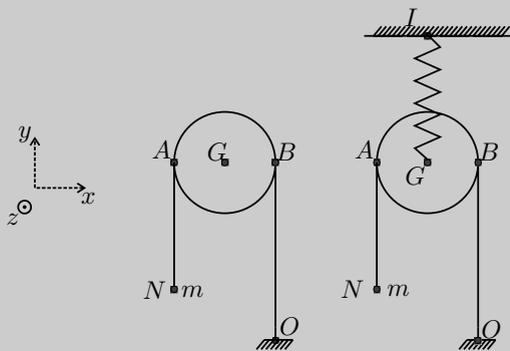
$$v = \frac{2}{3}gt$$

Exercice 1.4 : Poulie mobile (PC)

On considère une poulie qui se déroule sur un fil. Une extrémité du fil est fixée au sol. Une masse m est fixée à l'autre extrémité. La poulie est de masse M , de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R . Le point G peut se déplacer suivant la verticale Gy et soumis à une force $\vec{F} = F\vec{u}_y$.

1. Exprimer $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R, M, m, F et g .

2. Le point G est relié à un ressort fixé en I . On appelle $y(t)$ le déplacement du point G par rapport à sa position d'équilibre. Déterminer $y(t)$ sachant qu'à $t = 0$, $y = y_0$ et $\dot{y} = 0$.



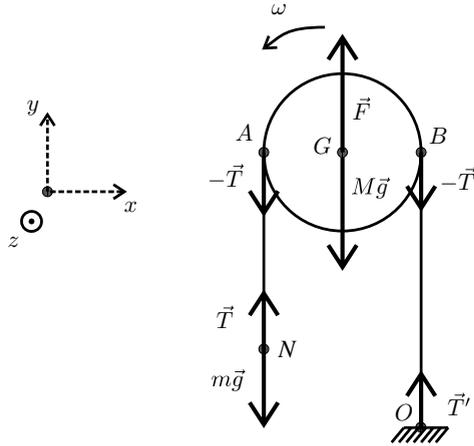
Analyse du problème

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire ω .



1. a) **Référentiel** : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) **Bilan des actions** :



Le fil est supposé idéal. Il exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$. On pose $\vec{T} = T\vec{u}_y$ et $\vec{T}' = T'\vec{u}_y$

c) **Éléments cinétiques** :

Le vecteur rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

La poulie se déroule sur un fil inextensible, donc la vitesse au point B est la même qu'au point O. Comme le point O est immobile, on a donc :

$$\vec{v}_B = \vec{0}$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{BG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & -R \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -R\omega\vec{u}_y$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{BA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & -2R \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -2R\omega\vec{u}_y$$

Comme le fil est inextensible, on a

$$\vec{v}_A = \vec{v}_N = -2R\omega\vec{u}_y$$

Le moment cinétique en G de la poulie est :

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gz} \omega \vec{u}_z = \frac{MR^2}{2} \omega \vec{u}_z$$

d) On a trois inconnues : T, T' et ω . Il faut donc trois équations :

PFD au point N :

$$m \frac{dv_N}{dt} = -2mR \frac{d\omega}{dt} = T - mg \quad (eq.1)$$

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie :

$$M \frac{dv_G}{dt} = -MR \frac{d\omega}{dt} = -T - T' - Mg + F \quad (eq.2)$$

Théorème du moment cinétique en G à la poulie :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \vec{GA} \wedge (-T \vec{u}_y) + \vec{GB} \wedge (-T' \vec{u}_y) + \vec{0}$$

Le moment en G du poids $M\vec{g}$ est nul ainsi que le moment de la force F puisque ces forces s'exercent au point G .

On en déduit :

$$\frac{MR^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = -R\vec{u}_x \wedge (-T\vec{u}_y) + R\vec{u}_x \wedge (-T'\vec{u}_y) = R(T - T') \vec{u}_z$$

Soit :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = T - T' \quad (eq.3)$$

Des équations (1) et (3), on a : $T = mg - 2mR \frac{d\omega}{dt}$

et $T' = T - \frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt}$.

En remplaçant dans l'équation (2), on a :

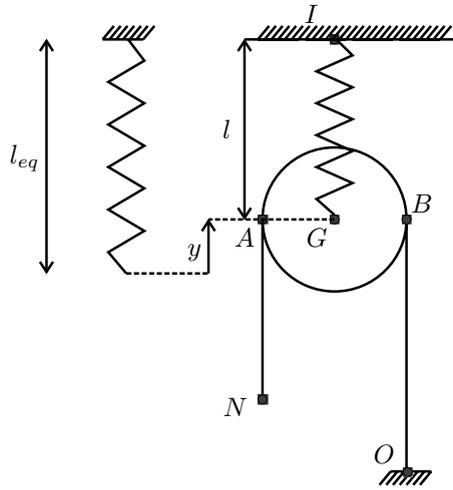
$$-MR \frac{d\omega}{dt} = -2mg + 4mR \frac{d\omega}{dt} + \frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} - Mg + F$$

D'où

$$\frac{d\omega}{dt} \left(\frac{3MR}{2} + 4mR \right) = 2mg + Mg - F$$

Interprétation : Si $F > 2mg + Mg$, le point G monte et on a bien $\frac{d\omega}{dt} < 0$. On vérifie l'homogénéité de l'expression obtenue.

2. Le point G est relié à un ressort fixé en I . On représente le ressort à l'équilibre et à un instant t quelconque.



Cours : Méthode systématique pour bien déterminer la force exercée par un ressort :

- Faire un schéma à l'équilibre et à un instant t pour déterminer la longueur du ressort puis l'allongement. Attention : Il faut prendre l'initiative d'appeler l_0 la longueur à vide et l_{eq} la longueur à l'équilibre.
- La projection de la force sur un axe va s'écrire : + ou $-k(l - l_0)$. Pour déterminer correctement le signe, on imagine que le ressort est étiré. On regarde alors dans quel sens est la force exercée par ce ressort et on en déduit le signe de la projection sur l'axe choisi.
- Écrire le théorème de la quantité de mouvement et le réécrire à l'équilibre. Il suffit de faire la différence des deux équations pour supprimer les termes inconnus.



La longueur du ressort à un instant t est : $l = l_{eq} - y$. La force exercée par le ressort est : $F = k(l - l_0) = k(l_{eq} - y - l_0)$.

On a vu que $v_G = \dot{y} = -R\omega$. On remplace F par son expression dans la relation trouvée à la fin de la question 1. On obtient :

$$\frac{-\ddot{y}}{R} \left(\frac{3MR}{2} + 4mR \right) = 2mg + Mg - k(l_{eq} - y - l_0)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\ddot{y} \left(\frac{3M}{2} + 4m \right) + ky = -2mg - Mg + k(l_{eq} - l_0) \quad (eq.1)$$

À l'équilibre, on a $y = 0$ et $\ddot{y} = 0$. L'équation (1) s'écrit :

$$0 = -2mg - Mg + k(l_{eq} - l_0) \quad (eq.2)$$

En faisant la différence (1) - (2), on a :

$$\ddot{y} \left(\frac{3M}{2} + 4m \right) + ky = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. On définit la pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{3M}{2} + 4m}}$$

La résolution donne :

$$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

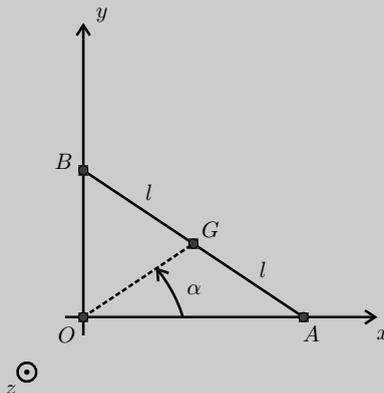
Comme à $t = 0$, $y = y_0$ et $\dot{y} = 0$. On a donc $A = y_0$ et $B = 0$. On obtient finalement :

$$y = y_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 1.5 : Barre sur un mur (PC)

On considère une barre homogène de longueur $2l$ dans un plan vertical. Une extrémité A peut se déplacer sans frottement sur l'axe Ox . L'autre extrémité B peut se déplacer sans frottement sur l'axe Oy . La barre est de masse m , de centre d'inertie G et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{1}{3}ml^2$. A $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$ et $\dot{\alpha} = 0$.

1. Établir une relation entre $\ddot{\alpha}$ et α . En déduire une relation entre $\dot{\alpha}$ et α .
2. Pour quel angle α la barre quitte le mur en B ?



Analyse du problème

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

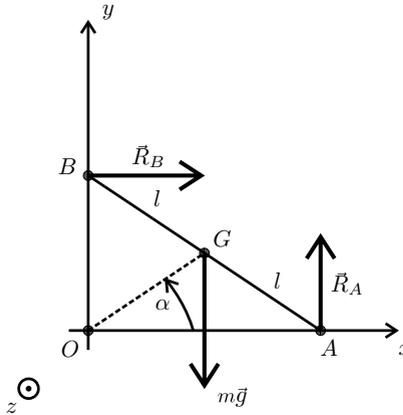
La première difficulté est de déterminer le vecteur rotation.

On utilisera deux méthodes pour trouver $\ddot{\alpha}$ en fonction de α : méthode 1 avec les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique, méthode 2 utilisant un raisonnement énergétique souvent très rapide. Il convient tout particulièrement ici puisqu'on a un système conservatif à une dimension.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :



Comme il n'y a pas de frottement en A et en B, la réaction du support est orthogonale au petit déplacement. La réaction en A peut se mettre sous la forme : $\vec{R}_A = R_A \vec{u}_y$ et la réaction en B sous la forme : $\vec{R}_B = R_B \vec{u}_x$

c) Éléments cinétiques :

On cherche à exprimer les différents éléments cinétiques en fonction de α qui est le paramètre le plus pertinent de l'exercice.



La difficulté est de déterminer le vecteur rotation en fonction de $\dot{\alpha}$. Quand la détermination n'est pas immédiate, on calcule directement deux vitesses du solide (ici les points A et B) et on déduit le vecteur rotation en utilisant la formule de Varignon.



Les coordonnées des points A et B sont :

$$A \begin{vmatrix} 2l \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; B \begin{vmatrix} 0 \\ 2l \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

G est le milieu du segment $[AB]$, on en déduit :

$$G \begin{cases} \frac{1}{2}(x_A + x_B) = l \cos \alpha \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) = l \sin \alpha \\ 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\vec{v}_A \begin{cases} -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \vec{v}_B \begin{cases} 0 \\ 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{cases}. \text{ On en déduit : } \vec{v}_G \begin{cases} -l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{cases}$$

L'accélération du point G est :

$$\vec{a}_G \begin{cases} l(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ l(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{cases}$$

Le vecteur rotation peut se mettre sous la forme : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On applique la formule de Varignon à la barre :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2l \cos \alpha \\ 2l \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 0 = -2l\dot{\alpha} \sin \alpha - 2\omega l \sin \alpha \\ 0 = 2l\dot{\alpha} \cos \alpha - 2\omega l \cos \alpha \\ 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha} \vec{u}_z$$

Remarque

Il ne faut pas être surpris d'avoir un signe $-$. En effet, si α augmente, la barre tourne dans le sens horaire et le pouce de la main droite est dirigé suivant $-\vec{u}_z$.



d) On a trois inconnues : α , R_A et R_B . Il faut donc trois équations.

Cours : On va utiliser deux méthodes pour répondre à la question :

Méthode 1 : écrire les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

Méthode 2 : écrire la conservation de l'énergie mécanique. On va voir que le raisonnement énergétique est beaucoup plus rapide.



Première méthode : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Théorème de la quantité de mouvement à la barre :

La projection sur \vec{u}_x, \vec{u}_y s'écrit :

$$\begin{cases} ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) = R_B & (eq.1) \\ ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = R_A - mg & (eq.2) \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$J_{Gz} \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{GG} \wedge (m\vec{g}) + \overrightarrow{GA} \wedge (\vec{R}_A) + \overrightarrow{GB} \wedge (\vec{R}_B)$$

Il reste à calculer les produits vectoriels :

$$-J_{Gz} \ddot{\alpha} \vec{u}_z = \begin{vmatrix} l \cos \alpha & 0 \\ -l \sin \alpha & R_A \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l \cos \alpha & R_B \\ l \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La projection sur \vec{u}_z s'écrit :

$$-J_{Gz} \ddot{\alpha} = l(\cos \alpha) R_A - l(\sin \alpha) R_B \quad (eq.3)$$

On élimine R_A et R_B avec les deux premières équations et on réinjecte dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} -J_{Gz} \ddot{\alpha} &= l(\cos \alpha)(mg + ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)) \\ &\quad -l(\sin \alpha)(ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)) \end{aligned}$$

En développant, on a :

$$-J_{Gz} \ddot{\alpha} = mgl \cos \alpha + ml^2 \ddot{\alpha}$$

Soit :

$$\ddot{\alpha} ml^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -mgl \cos \alpha$$

On en déduit :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha$$

On multiplie par $\dot{\alpha}$ pour trouver une relation entre $\dot{\alpha}$ et α :

$$\dot{\alpha} \ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} (\cos \alpha) \dot{\alpha}$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - 0 = -\frac{3g}{4l}(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Les réactions R_A et R_B ne travaillent pas car il n'y a pas de frottement en A et B .

Le poids de la barre dérive d'une énergie potentielle :
 $E_p = mgy_B = mgl \sin \alpha$.

Le système est donc conservatif. On a conservation de l'énergie mécanique. On calcule l'énergie cinétique en utilisant le théorème de Koenig :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2$$

Dans le référentiel barycentrique, on a : $E_c^* = \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\alpha}^2$.

On a vu que la vitesse du point G est : $\vec{v}_G \begin{vmatrix} -l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

On a donc : $\frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$.

L'énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha = \frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha$$

A $t = 0$, on a : $E_{m0} = mgl \sin \alpha_0$.

En faisant la différence, on a :

$$\frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 = mgl(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

En simplifiant, on a :

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l}(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

On retrouve bien l'équation trouvée avec la première méthode. On peut en déduire l'équation différentielle en calculant la dérivée par rapport au temps.

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{2l}(\cos \alpha)\dot{\alpha}$$

En simplifiant par $\dot{\alpha}$, on a :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l}\cos \alpha$$

La méthode énergétique est beaucoup plus rapide que la première méthode.

2. On a vu que : $R_B = ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)$

La barre quitte le mur en B lorsque $R_B = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\ddot{\alpha} \sin \alpha = \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$$

D'après la question précédente :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha \text{ et } \dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha).$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on a :

$$-\frac{3g}{4l} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{3g}{2l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \cos \alpha$$

La solution $\cos \alpha = 0$ n'est pas intéressante car la barre est verticale. En simplifiant, on a :

$$-\sin \alpha = 2 (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

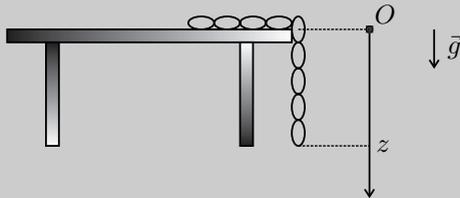
Finalement, la barre quitte le mur lorsque :

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$$

Exercice 1.6 : Chaîne sur une table (PC-PSI)

On considère une chaîne de longueur L , de masse linéique λ uniforme. Elle glisse sans frottement sur une table. On appelle z la position de l'extrémité de la chaîne dans l'air. A $t = 0$, $z(0) = \frac{L}{4}$ et $\dot{z}(0) = 0$. On pose $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

En utilisant un raisonnement énergétique, déterminer $z(t)$.



Analyse du problème

On utilise le raisonnement énergétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement. Cette méthode convient tout particulièrement aux systèmes conservatifs à une dimension.



1. Obtention de l'équation différentielle

a) **Système** : chaîne de longueur L .

b) **Référentiel** : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

c) **Bilan des actions** :

- Comme il n'y a pas de frottement entre la chaîne et la table, la réaction du support est orthogonale au petit déplacement. Le travail élémentaire est nul, c'est donc une force conservative.
- La force de pesanteur est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle.

Le système est donc conservatif.

On choisit l'origine des énergies potentielles de pesanteur pour $z = 0$.

La partie de chaîne qui est sur la table a une énergie potentielle nulle.

La partie de chaîne qui n'est plus sur la table a son centre d'inertie G au milieu, c'est-à-dire en $\frac{z}{2}$. La masse est λz . L'énergie potentielle de pesanteur est donc :

$$E_p = -(\lambda z)g \left(\frac{z}{2} \right)$$



Attention : l'axe Oz est orienté vers le bas. Il faut donc un signe $-$ dans l'expression de l'énergie potentielle.



Tous les points de la chaîne ont la même vitesse \dot{z} .

L'énergie cinétique de la chaîne de masse λL est :

$$E_c = \frac{1}{2}(\lambda L)\dot{z}^2$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\lambda L\dot{z}^2 - \lambda g \frac{z^2}{2}$$

d) On obtient l'équation différentielle en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps. Comme le système est conservatif, l'énergie mécanique est constante au cours du temps. On a alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}\lambda L 2\dot{z}\ddot{z} - \lambda g \frac{2z\dot{z}}{2}$$

On obtient alors :

$$\ddot{z} - \frac{g}{L}z = 0$$

2. Résolution de l'équation différentielle

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \frac{g}{L} = 0$$

On a deux racines réelles : $r = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} = \pm \omega$.



Ce n'est pas l'équation d'un oscillateur harmonique. Il faut donc résoudre l'équation caractéristique pour déterminer $z(t)$.

Attention à ne pas écrire $-\frac{g}{L}r$ au lieu de $-\frac{g}{L}$.



On a alors :

$$z = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t)$$

La vitesse est :

$$\dot{z} = A\omega \exp(\omega t) - B\omega \exp(-\omega t)$$

On détermine A et B en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0) = \frac{L}{4} = A + B \\ \dot{z}(0) = A\omega - B\omega \end{cases}$$

On en déduit que $A = B = \frac{L}{8}$. On a alors :

$$z(t) = \frac{L}{8} \exp(\omega t) + \frac{L}{8} \exp(-\omega t) = \frac{L}{4} \text{ch}(\omega t)$$

Remarque

On aurait pu utiliser directement les fonctions ch et sh pour résoudre l'équation différentielle :

$$z = A' \text{ch}(\omega t) + B' \text{sh}(\omega t)$$

Lois de Coulomb du frottement de glissement

Exercice 2.1 : Déplacement d'un solide sur un plan horizontal (PC)

On considère un solide homogène de masse m qui repose sur un sol horizontal. Le coefficient de frottement entre le solide et le sol est f . Il n'y a pas force appliquée au point A .

1. On augmente progressivement la force \vec{F} . Quelle est la valeur maximale de la force pour que le solide reste à l'équilibre ?
2. Quelle force doit-on exercer au point A pour déplacer le solide à vitesse constante ? Quelle est la condition pour qu'il n'y ait pas de basculement ?
3. Le solide se déplace à vitesse constante v_0 . A $t = 0$, on supprime la force \vec{F} . Calculer la distance parcourue.



Analyse du problème

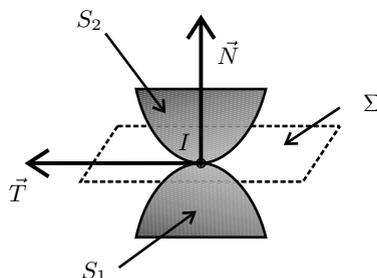
Dans cet exercice, on a un frottement entre le sol et le solide. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

Méthode de résolution des exercices : on fait des hypothèses (glissement ou pas de glissement) et on n'oubliera pas de bien vérifier les hypothèses.

On verra comment traduire correctement la condition de non basculement.

Cours : Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

On considère un contact ponctuel au point I entre deux solides S_1 et S_2 . On appelle Σ la surface de contact entre les deux solides.



On appelle \vec{R} l'action de contact que le solide S_1 exerce sur le solide S_2 . D'après le principe des actions réciproques, l'action de contact que S_2 exerce sur S_1 est $-\vec{R}$.

On peut décomposer \vec{R} en deux termes :

- composante tangentielle \vec{T} (contenue dans le plan Σ)
- composante normale \vec{N} (orthogonale au plan Σ).

On a donc :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \text{ et } \vec{\Gamma}_I(\vec{R}) = \vec{\Gamma}_I(\vec{T}) + \vec{\Gamma}_I(\vec{N})$$

On rencontre deux cas :

Premier cas : pas de glissement

On considère le cas où la vitesse de glissement est nulle.

On a alors :

$$\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{v}_{I \in S_2} - \vec{v}_{I \in S_1} = \vec{0}$$

On définit un coefficient de frottement statique f_S qui caractérise le contact entre les deux solides. La loi de Coulomb s'écrit :

$$\|\vec{T}\| \leq f_S \|\vec{N}\|$$

Lorsqu'on effectue le bilan des forces, on n'est pas obligé de connaître l'orientation de \vec{T} .

On pourra choisir arbitrairement le sens de \vec{T} .

Deuxième cas : glissement

On considère le cas où le solide S_2 glisse sur le solide S_1 . On définit f_C le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) qui caractérise le contact entre les deux solides.

La loi de Coulomb s'écrit :

- \vec{T} est colinéaire et de sens opposé à la vitesse de glissement

$$\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{v}_{I \in S_2} - \vec{v}_{I \in S_1}$$

- $\|\vec{T}\| = f_C \|\vec{N}\|$

On a vu que dans le cas où il n'y a pas de glissement, on n'est pas obligé de connaître l'orientation de \vec{T} .

Par contre, dans le cas du glissement, il faut connaître le sens de \vec{T} .

On a en général $f_C \leq f_S$ et souvent dans les exercices on prend $f_C = f_S$ que l'on note f .



Lorsqu'on a un contact entre deux solides sur une surface, l'action de contact n'est pas toujours une force appliquée en un point. Par contre, si on trouve un point I pour lequel le moment de l'action de contact est nul en ce point, alors l'action de contact est équivalente à une force appliquée en ce point.

Le point I doit appartenir à la surface de contact entre les deux solides. On utilisera cette propriété pour avoir une condition de non basculement.

Cas où il n'y a pas de frottement

Lorsqu'il n'y a pas de frottement entre deux solides, on a vu en première année que la réaction est normale à la surface de contact Σ entre les deux solides. Ce qui revient à avoir $f = 0$. On a donc nécessairement un glissement.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

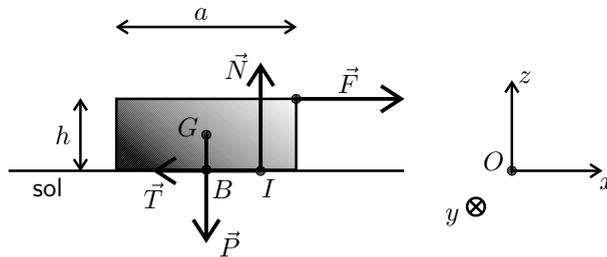
b) Bilan des actions :

On pose $\vec{F} = F\vec{u}_x$. On augmente progressivement la force F .

On note \vec{R} l'action de contact du sol sur le solide. On a :
 $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$.

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre du solide.

Il n'a pas de glissement puisque le solide est à l'équilibre.



On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide à l'équilibre :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T + F \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

Vérification des hypothèses de non glissement : $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$, soit

$$F \leq fmg$$

La valeur maximale de la force à appliquer est $F_{\max} = fmg$.

2. On cherche à déplacer le solide à vitesse constante : $\vec{v}_G = v\vec{u}_x$ avec $v > 0$.

Il y a nécessairement glissement.

La composante tangentielle de la réaction \vec{R} est forcément dirigée suivant $-\vec{u}_x$. On a donc $T > 0$.

On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide qui se déplace à vitesse constante :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T + F \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

On a glissement, donc $T = fN$. On a donc :

$$F = T = fN = fmg$$

Vérification des hypothèses de glissement :

La vitesse de glissement du solide par rapport au sol doit être positive. L'hypothèse est bien vérifiée puisqu'il se déplace à vitesse constante avec $v > 0$.



La condition $F = fmg$ n'est pas suffisante pour avoir un mouvement rectiligne uniforme. Si on fait l'expérience, on constate que si la force est trop grande, on peut avoir un basculement !

C'est souvent délicat de traduire correctement la condition de non basculement : il faut appliquer le théorème du moment cinétique au point I dans le référentiel barycentrique et trouver la condition pour que le point I appartienne bien à la surface de contact entre le solide et le sol.



Pour qu'il n'y ait pas de basculement, il faut que le moment cinétique du solide dans le référentiel barycentrique soit nul :

$$\vec{\sigma}^* (\text{solide}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique barycentrique peut se calculer en n'importe quel point. On va le calculer au point I et appliquer au solide le théorème du moment cinétique en I dans le référentiel barycentrique $\mathfrak{R}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$:

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{I^*}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}^*} = \vec{\Gamma}_{I(\text{ext})} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{I(\text{ext})} = \vec{II} \wedge \vec{T} + \vec{II} \wedge \vec{N} + \vec{IG} \wedge m\vec{g} + \vec{IA} \wedge \vec{F}$$

On repère la position du point I par : $\vec{BI} = x_I \vec{u}_x$.

Il reste à calculer les projections :

$$\begin{vmatrix} -x_I \\ 0 \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} - x_I \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mgx_I + cF \\ 0 \end{vmatrix}$$

La condition de non basculement est donc :

$$-mgx_I + cF = 0$$

On a donc : $x_I = \frac{cF}{mg}$

Le point I doit donc appartenir à la surface de contact entre le solide et le sol, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$-\frac{a}{2} \leq x_I \leq \frac{a}{2}$$

D'où :

$$-\frac{a}{2} \leq \frac{cF}{mg} \leq \frac{a}{2}$$

Comme la force F est positive, **la condition de non basculement** s'écrit donc :

$$F \leq \frac{mga}{2c}$$

Si cette condition est vérifiée, le moment en I de l'action de contact est nul. L'action de contact est donc équivalente à une force appliquée en ce point. On peut réaliser facilement l'expérience et se rendre compte des différents cas étudiés dans l'exercice.

3. On supprime la force \vec{F} à $t = 0$.

Il y a nécessairement glissement tant que le solide se déplace. Il ralentit et finit pas s'arrêter pour $t = t_1$. On est alors dans le cas où il n'y a pas de glissement et restera immobile.

La composante tangentielle de la réaction \vec{R} est forcément dirigée suivant $-\vec{u}_x$ puisque le mouvement est suivant $+\vec{u}_x$. On a donc $T > 0$.

On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide qui est se déplace à vitesse constante :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{u}_x = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -T \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

On a glissement, donc $T = fN$, soit

$$m \frac{dv}{dt} = -T = -fN = -fmg$$

On sépare les variables :

$$dv = -fg dt$$

On intègre entre $t = 0$ et $t = t_1$, l'instant où il va s'arrêter :

$$0 - v_0 = -fg(t_1 - 0)$$

On a donc :

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}$$

Pour déterminer l'abscisse, on part de l'équation $dv = -fg dt$ que l'on intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$v - v_0 = -fgt$$

On en déduit : $\frac{dx}{dt} = v_0 - fgt$.

On sépare à nouveau les variables : $dx = (v_0 - fgt) dt$. On intègre entre $t = 0$, instant pour lequel on a $x = 0$ et $t = t_1$, instant pour lequel on a $x = x_1$:

$$x_1 - 0 = v_0 t_1 - \frac{fgt_1^2}{2}$$

la distance parcourue est donc :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{fgt_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{fg} - \frac{fg}{2} \left(\frac{v_0}{fg} \right)^2$$

Vérification des hypothèses de glissement :

La vitesse de glissement du solide par rapport au sol doit être positive. L'hypothèse est bien vérifiée puisqu'il se déplace à vitesse constante avec $v > 0$.

Quand il s'arrête, on n'a plus de glissement. Il faut vérifier que $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$.

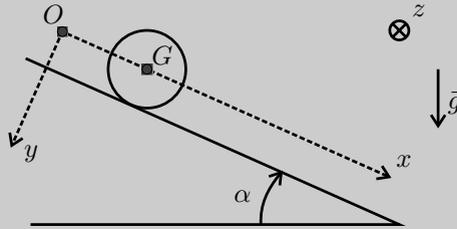
C'est bien le cas puisque la projection du principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

Exercice 2.2 : Sphère sur un plan incliné (PC)

On considère une sphère homogène de masse m , de rayon R et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2$. On pose $\vec{OG} = x\vec{u}_x$ et $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$. Le coefficient de frottement entre la sphère et le sol est f . A $t = 0$, $x = 0$ et $\omega = 0$.

1. Quelle est la condition sur l'angle α pour avoir un roulement sans glissement ? Déterminer ω en fonction de t par deux méthodes.
2. Dans le cas d'un roulement avec glissement, déterminer ω en fonction de t .



Analyse du problème

On a un frottement entre le sol et la sphère. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

On fait des hypothèses (glissement ou pas de glissement) et on n'oubliera pas de vérifier les hypothèses.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système conservatif à une dimension.

Cours : Roulement sans glissement

On a un roulement sans glissement lorsque le vecteur rotation $\vec{\omega}_{S_1/S_2}$ est contenu dans le plan Σ (voir exercice 2.1) et que la vitesse de glissement est nulle $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}_{I \in S_1} - \vec{v}_{I \in S_2}$.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

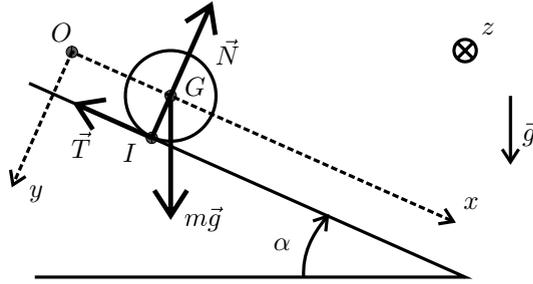
b) Bilan des actions :

On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

On note \vec{R} l'action de contact du sol sur le solide. On a : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{u}_x - N\vec{u}_y$.

On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T} . Il faudra vérifier que $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$.

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la sphère.



c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, la vitesse de glissement de la sphère par rapport au plan incliné est donc nulle : \vec{v}_g (sphère/sol) = $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{sol}}$.

Comme $\vec{v}_{I \in \text{sol}}$, alors $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{0}$.

Le vecteur rotation est : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On applique la formule de Varignon pour calculer la vitesse de G :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$\dot{x} = R\omega$$

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a quatre inconnues : T, N, ω et x. Il faut quatre équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$\dot{x} = R\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$$

La projection sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg \sin \alpha & (\text{eq.2}) \\ 0 = mg \cos \alpha - N & (\text{eq.3}) \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \frac{2}{5} m R^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \vec{G}\vec{G} \wedge (m\vec{g}) + \vec{G}\vec{I} \wedge (\vec{N}) + \vec{G}\vec{I} \wedge (\vec{T})$$

$$= RT \vec{u}_z$$

On a donc :

$$\frac{2}{5} m R \frac{d\omega}{dt} = T \quad (\text{eq.4})$$

On fait la somme (eq.4) + (eq.2) et on remplace \ddot{x} par $R \frac{d\omega}{dt}$, on obtient :

$$\left(\frac{2}{5} m R + m R \right) \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) dt$$

L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$\omega = \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) t$$



Il ne faut pas oublier à la fin de vérifier la condition de roulement sans glissement.



On en déduit :

$$T = \frac{2}{5} m R \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5} m R \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) = \frac{2}{7} mg \sin \alpha$$

et

$$N = mg \cos \alpha$$

La condition $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$ se traduit par :

$$\frac{2}{7} mg \sin \alpha \leq f mg \cos \alpha$$

Soit :

$$\tan \alpha \leq \frac{7f}{2}$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse du point I est nulle. Les forces \vec{T} et \vec{N} ne travaillent pas. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Le système est donc conservatif.

Remarque : Comme $\dot{x} = R\omega$, on a un **système conservatif à une dimension**. L'énergie mécanique est une grandeur conservative. L'équation différentielle du mouvement s'obtient directement en écrivant que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle.



L'énergie potentielle est :

$$E_p = -mgx \sin \alpha$$



Attention au signe $-$ pour l'énergie potentielle.



On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique. Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Comme $\dot{x} = R\omega$, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mgx \sin \alpha$$

On dérive par rapport au temps et on utilise la relation $\dot{x} = R\omega$:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{2}{5}mR^2\omega \frac{d\omega}{dt} + mR^2\omega \frac{d\omega}{dt} - mgR\omega \sin \alpha$$

On simplifie par ω qui est une solution parasite :

$$\frac{7}{5} \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{R} \sin \alpha$$

Remarque

Il ne faut pas être surpris de simplifier par ω grandeur proportionnelle à la vitesse. Pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique, on multiplie le principe fondamental de la dynamique par la vitesse pour faire apparaître la puissance cinétique. Ici on fait l'opération inverse.



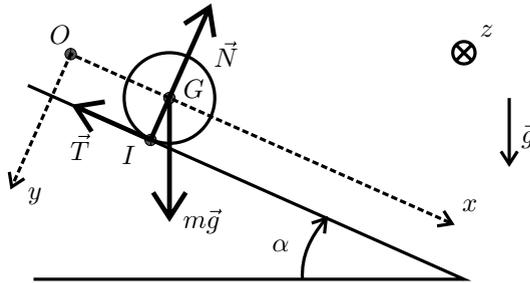
On sépare les variables : $d\omega = \frac{5g}{7R}(\sin \alpha)dt$. L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$\omega = \frac{5g}{7R}(\sin \alpha)t$$

On retrouve beaucoup plus rapidement le même résultat que précédemment. Il ne faut pas oublier de vérifier la condition de roulement sans glissement.

2. On a un roulement avec glissement.

Dans ce cas, il faut connaître le sens de \vec{T} . Comme le mouvement se fait suivant $+\vec{u}_x$, alors \vec{T} est suivant $-\vec{u}_x$. On pose $\vec{T} = -T\vec{u}_x$.



On a quatre inconnues : T, N, ω et x . Il faut quatre équations :

Roulement avec glissement :

$$T = fN \quad (\text{eq.5})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

On a déjà écrit la projection sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg \sin \alpha & (\text{eq.6}) \\ 0 = mg \cos \alpha - N & (\text{eq.7}) \\ 0 & \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$\frac{2}{5}mR^2 \frac{d\omega}{dt} = RT \quad (\text{eq.8})$$

On en déduit que :

$$\frac{2}{5}mR \frac{d\omega}{dt} = T = fN = fmg \cos \alpha$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{5fg \cos \alpha}{2R} dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\omega = \frac{5fg \cos \alpha}{2R} t$$

On a vu que $T = fN = fmg \cos \alpha$. En reportant dans l'équation (6), on a :

$$m\ddot{x} = -fmg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

On intègre :

$$\dot{x} = -fg(\cos \alpha)t + g(\sin \alpha)t$$

Vérification des hypothèses de glissement : La vitesse de glissement par rapport au plan incliné doit être positive. On calcule la vitesse au point I en utilisant la formule de Varignon :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GI} = \dot{x}\vec{u}_x + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} - R\omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit que :

$$\dot{x}_I = -fg(\cos \alpha)t + g(\sin \alpha)t - R \frac{5fg \cos \alpha}{2R} t$$

D'où :

$$\dot{x}_I = -\left(\frac{7fg \cos \alpha}{2} - g \sin \alpha\right) t$$

La condition de glissement est $\dot{x}_I > 0$, soit :

$$g \sin \alpha > \frac{7fg \cos \alpha}{2}$$

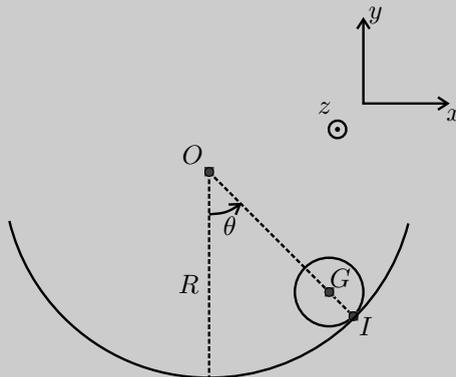
On retrouve bien :

$$\tan \alpha > \frac{7f}{2}$$

Exercice 2.3 : Sphère dans une cuvette (PC)

On considère une sphère homogène de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{2}{5}mr^2$. Elle roule sans glissement à l'intérieur d'une sphère immobile de rayon R . Le coefficient de frottement entre les deux sphères est $f = 0,5$. A $t = 0$, $\theta_0 = 1$ et $\dot{\theta}_0 = 0$.

1. Déterminer par deux méthodes l'équation différentielle du mouvement. On pourra vérifier graphiquement la condition de roulement sans glissement.
2. Déterminer θ en fonction du temps dans le cas où $\theta_0 \ll 1$.



Analyse du problème

On a un frottement entre deux sphères. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

On fait des hypothèses (ici roulement sans glissement) et on n'oubliera pas de vérifier les hypothèses.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système conservatif à une dimension.



1. a) Référentiel : $\Re = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen. On projette dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

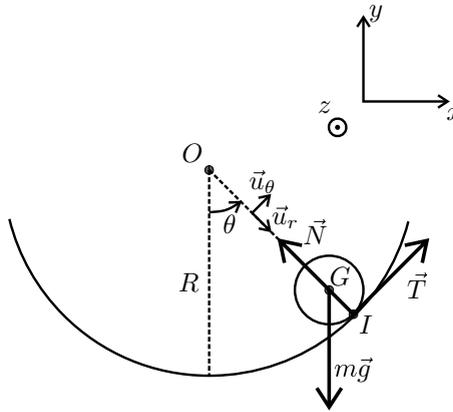
b) Bilan des actions :

On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

On note \vec{R} l'action de contact du support sur la sphère de rayon r . On a : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{u}_\theta - N\vec{u}_r$.

On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T} . Il faudra vérifier que $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$.

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la sphère.



c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, la vitesse de glissement de la sphère par rapport au support est donc nul : \vec{v}_g (sphère/support) = $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{support}}$.

Comme $\vec{v}_{I \in \text{support}} = \vec{0}$

Le vecteur rotation de la sphère est : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.



La détermination du vecteur rotation n'est pas évidente ici. Il faut donc utiliser la formule de Varignon pour le déterminer.



$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -r\omega \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a $\vec{OG} = (R - r)\vec{u}_r$ et $\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

On a donc :

$$(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$$

Interprétation physique : Si $\omega < 0$, on a bien $\dot{\theta} > 0$.

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a quatre inconnues : T , N , ω et θ . Il faut quatre équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$(R - r)\dot{\theta} = -r\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$$

On a vu que : $\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

On a vu en première année que : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et que $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$.

On a donc : $\vec{a}_G = (R - r) (\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r)$.

On en déduit la projection du théorème de la quantité de mouvement dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\begin{cases} -m(R - r)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - N \text{ (eq.2)} \\ m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + T \text{ (eq.3)} \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z &= \frac{2}{5}mr^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \vec{G}\vec{G} \wedge (m\vec{g}) + \vec{G}\vec{I} \wedge (\vec{N}) + \vec{G}\vec{I} \wedge (\vec{T}) \\ &= rT\vec{u}_z \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{2}{5}mr \frac{d\omega}{dt} = T$$

Soit :

$$-\frac{2}{5}m(R - r)\ddot{\theta} = T \quad \text{(eq.4)}$$

En combinant les équations (3) et (4), on a :

$$m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \frac{2}{5}m(R - r)\ddot{\theta}$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{7}{5}m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin \theta = 0$$



Il ne faut pas oublier à la fin de vérifier la condition de roulement sans glissement.



On en déduit :

$$T = -\frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta} = \frac{2}{5}m(R-r)\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$

et

$$N = m(R-r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Pour exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ , on multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$ et on l'intègre.

On obtient :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}(\sin\theta)\dot{\theta} = 0$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta\right) = 0$$

Le fonction à l'intérieur de la dérivée prend donc la même valeur à l'instant t et à l'instant $t = 0$:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta = -\frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta_0$$

On a donc :

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

On en déduit la composante normale :

$$N = \frac{10mg}{7}(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta = \frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg\cos\theta_0$$

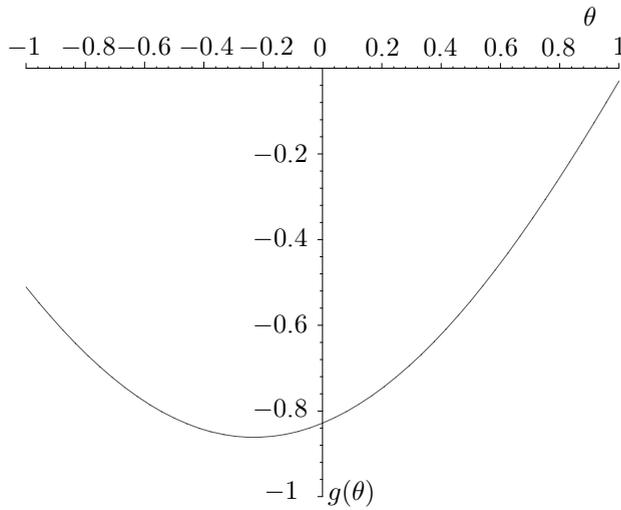
La condition de roulement sans glissement est : $|T| \leq f|N|$, soit :

$$\frac{2}{7}mg\sin\theta \leq f\left(\frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg\cos\theta_0\right)$$

On pose :

$$g(\theta) = \frac{2}{7}\sin\theta - f\frac{17}{7}\cos\theta + f\frac{10}{7}\cos\theta_0$$

On représente graphiquement g en fonction de θ .



On a nécessairement $|\theta| < \theta_0$ puisque à $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Vérification des hypothèses de non glissement :

Pour θ compris entre -1 et 1 , on a bien $|T| \leq f |N|$.

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse du point I est nulle. Les forces \vec{T} et \vec{N} ne travaillent pas. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Le système est donc conservatif.

Remarque : Comme $(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$, on a un **système conservatif à une dimension**. L'énergie mécanique est une grandeur conservative. L'équation différentielle du mouvement s'obtient directement en écrivant que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle.



On choisit le point O comme origine des énergies potentielles. On a donc :

$$E_p = -mg(R - r) \cos \theta$$



Attention au signe $-$ pour l'énergie potentielle.



On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique.

Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$$

Comme $(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{2}{5} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R - r) \cos \theta$$

L'énergie mécanique prend la même valeur à t et à $t = 0$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{5} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R - r) \cos \theta \\ &= -mg(R - r) \cos \theta_0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$(R - r) \dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

On dérive par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique pour en déduire l'équation différentielle du mouvement :

$$2(R - r) \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{10}{7} g (\sin \theta) \dot{\theta}$$

On simplifie par $\dot{\theta}$ pour en déduire l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin \theta = 0$$

On retrouve les mêmes résultats que précédemment sans oublier la vérification de la condition de roulement sans glissement.

Remarque

La méthode énergétique est beaucoup plus simple avec un système conservatif à une dimension.



2. Dans le cas des petites oscillations, on fait un développement limité à l'ordre 1.

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \theta = 0$$

On définit la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}}$.

On a un oscillateur harmonique dont la solution peut se mettre sous la forme :

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

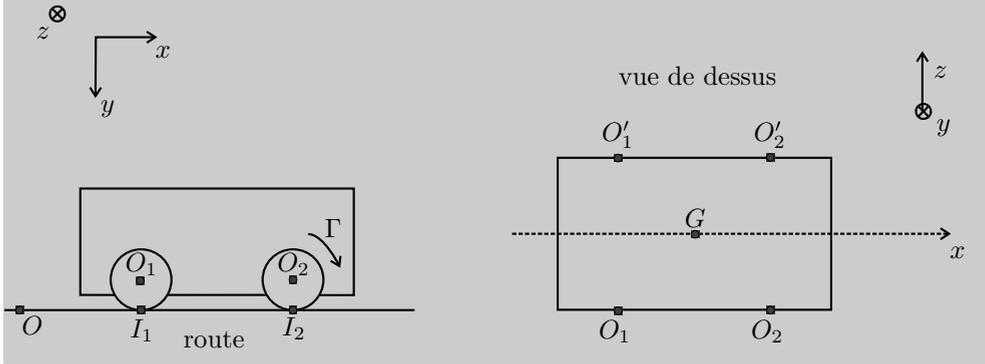
A $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$. On a donc :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 2.4 : Voiture (PC) *

On considère une voiture constituée d'un châssis de masse M et de quatre roues. Chaque roue est de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{1}{2}mr^2$. On suppose que chaque liaison pivot est parfaite. Le moteur exerce sur chaque roue avant un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ tel que $\Gamma > 0$. La voiture est équilibrée et se déplace à vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$. On pose $\vec{GO}_1 = -l\vec{u}_x + a\vec{u}_y$ et $\vec{GO}_2 = l\vec{u}_x + a\vec{u}_y$

Exprimer $\frac{dv}{dt}$ en fonction de Γ, r, m et M par deux méthodes. On ne vérifiera pas la condition de roulement sans glissement.



Analyse du problème

Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement et vérifier les hypothèses à la fin des calculs.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système à une dimension pour lequel on peut calculer facilement la puissance des forces.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :

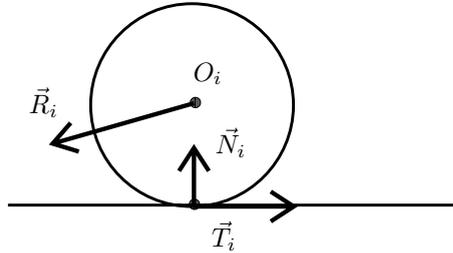
On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

On note \vec{R}_i l'action du châssis sur la roue d'indice i . L'action de la roue i sur le châssis est donc $-\vec{R}_i$.

On a un roulement sans glissement. On note $\vec{T}_i = T_i\vec{u}_x$ et $\vec{N}_i = -N_i\vec{u}_y$ les composantes tangentielle et normale de l'action de contact entre la roue et le sol. On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T}_i .

La voiture est équilibrée. Les forces sont symétriques par rapport à l'axe Gx . On a donc $T_1 = T_1', N_1 = N_1', \vec{R}_1 = \vec{R}_1', T_2 = T_2', N_2 = N_2', \vec{R}_2 = \vec{R}_2'$.

Sur une roue d'indice i , on a donc les forces suivantes : $m\vec{g}, \vec{R}_i, T_i\vec{u}_x$ et $-N_i\vec{u}_y$.



La résultante des forces de pesanteur sur la voiture (chassis + 4 roues) est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la voiture.

c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, donc $\vec{v}_{I_i \in \text{roue } i} = \vec{0}$.

Les 4 roues tournent à la même vitesse angulaire. Le vecteur rotation de chaque roue est : $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{I_i} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IO_i} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -r \end{vmatrix} = r\omega\vec{u}_x$$

On a donc :

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_G = v\vec{u}_x = r\omega\vec{u}_x$$

Le moment cinétique de la roue d'indice i est :

$$\vec{\sigma}_{O_i} = J\omega\vec{u}_z = \left(\frac{mr^2}{2}\right)\omega\vec{u}_z = \frac{mr}{2}v\vec{u}_z$$

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a 12 inconnues : $T_1, N_1, T_2, N_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}, \omega$ et v . Il faut donc 12 équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$v = r\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la voiture :

La masse totale est $(4m + M)$. On projette dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y)

$$\begin{cases} (4m + M) \frac{dv}{dt} = 2T_1 + 2T_2 & \text{(eq.2)} \\ 0 = (4m + M)g - 2N_1 - 2N_2 & \text{(eq.3)} \end{cases}$$

Théorème de la quantité de mouvement à la roue d'indice 1 :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = T_1 + R_{1x} & \text{(eq.4)} \\ 0 = -N_1 + R_{1y} + mg & \text{(eq.5)} \\ 0 = R_{1z} & \text{(eq.6)} \end{cases}$$

Théorème de la quantité de mouvement à la roue d'indice 2 :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = T_2 + R_{2x} & \text{(eq.7)} \\ 0 = -N_2 + R_{2y} + mg & \text{(eq.8)} \\ 0 = R_{2z} & \text{(eq.9)} \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G au châssis :

$$\vec{0} = -2\vec{\Gamma} + \vec{GG} \wedge (M)\vec{g} + 2\vec{GO}_1 \wedge (-\vec{R}_1) + 2\vec{GO}_2 \wedge (-\vec{R}_2')$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2l \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{1x} \\ -R_{1y} \\ -R_{1z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2l \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{2x} \\ -R_{2y} \\ -R_{2z} \end{vmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} 0 = -2aR_{1z} - 2aR_{2z} \\ 0 = -2lR_{1z} + 2lR_{2z} \\ 0 = 2lR_{1y} + 2aR_{1x} - 2lR_{2y} + 2aR_{2x} - 2\Gamma \end{cases} \quad \text{(eq.10)}$$

Les deux premières projections ne sont pas des équations supplémentaires par rapport à (6) et (9).

On utilise les équations (4), (5), (7) et (8) pour simplifier la troisième projection :

$$\begin{aligned} 0 &= 2l(N_1 - mg) + 2a \left(m \frac{dv}{dt} - T_1 \right) - 2l(N_2 - mg) \\ &\quad + 2a \left(m \frac{dv}{dt} - T_2 \right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$0 = 4am \frac{dv}{dt} - 2a(T_1 + T_2) + 2l(N_1 - N_2) \quad (\text{eq.A})$$

Théorème du moment cinétique en O_2 à la roue d'indice 2 :

$$J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \vec{O_2 I_2} \wedge (\vec{T}_2 + \vec{N}_2) + \vec{O_2 G_2} \wedge m\vec{g} + \vec{\Gamma}$$

On obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T_2 \\ -N_2 \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -rT_2 + \Gamma \end{vmatrix}$$

On a donc pour chaque roue avant :

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = -rT_2 + \Gamma$$

De même, on a pour chaque roue arrière :

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = -rT_1$$

On en déduit :

$$T_2 = -\frac{mr}{2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\Gamma}{r} = -\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{\Gamma}{r} \quad (\text{eq.11})$$

et

$$T_1 = -\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} \quad (\text{eq.12})$$

En utilisant les équations (2), (11) et (12), on a :

$$(4m + M) \frac{dv}{dt} = -m \frac{dv}{dt} - m \frac{dv}{dt} + 2 \frac{\Gamma}{r}$$

Soit :

$$(6m + M) \frac{dv}{dt} = 2 \frac{\Gamma}{r}$$

Vérification des hypothèses :

Il faut que $|T_1| \leq f |N_1|$ et $|T_2| \leq f |N_2|$

On a :

$$T_1 = -\frac{m \, dv}{2 \, dt} = -\frac{m}{2} \frac{2\Gamma}{r(6m + M)} = -\frac{m\Gamma}{r(6m + M)}$$

et

$$T_2 = -\frac{m\Gamma}{r(6m + M)} + \frac{\Gamma}{r} = \frac{\Gamma}{r} \left(1 - \frac{m}{6m + M} \right)$$

On a $T_2 > 0$ et $T_1 < 0$.

Interprétation physique : Si $\Gamma > 0$, le couple moteur a tendance à faire tourner la roue dans le sens horaire. Pour que la roue 2 ne glisse pas, on doit avoir $T_2 > 0$.

Le couple moteur ne s'applique pas sur les roues arrières. Pour ne pas avoir de glissement, on doit donc avoir $T_1 < 0$ puisque c'est la seule force qui contribue au moment et donc à la rotation de la roue 1.

Avec les équations (A) et (3), on peut en déduire N_1 et N_2 puis le couple maximum pour ne pas avoir de glissement.

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Le système étudié est la voiture constituée du châssis et des quatre roues.

Il faut faire le bilan des actions extérieures et intérieures :

- Actions extérieures : Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse aux points I_i est nulle. Les forces \vec{T}_i et \vec{N}_i ne travaillent pas. Les forces de pesanteur ne travaillent pas.
- Actions intérieures : Les liaisons pivot sont parfaites. La puissance des actions de liaison est donc nulle. Attention : la puissance du couple $\vec{\Gamma}$ qui s'applique sur chaque roue avant est non nulle. Elle vaut : $\vec{\Gamma} \cdot \omega \vec{u}_z + \vec{\Gamma} \cdot \omega \vec{u}_z = 2\Gamma \frac{v}{r}$. Par contre, la puissance du couple $\vec{\Gamma}$ exercé par chaque roue sur le châssis, est nulle car il n'y a pas de rotation du châssis.

On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique de chaque roue. Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (O_i; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

L'énergie cinétique de la voiture est :

$$E_c = 4 \left(\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{1}{2} M v^2$$

Comme $\omega = \frac{v}{r}$ on a :

$$E_c = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (M + 4m) v^2 = \frac{1}{2} (M + 6m) v^2$$

La puissance des forces extérieures est nulle.

La puissance des forces intérieures est égale à :

$$P_{\text{int}} = 2\Gamma \frac{v}{r}$$

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = (6m + M) v \frac{dv}{dt} = P_{\text{int}} = 2\Gamma \frac{v}{r}$$

En simplifiant par v , on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$(6m + M) \frac{dv}{dt} = P_{\text{int}} = \frac{2\Gamma}{r}$$

Remarque

On voit tout l'intérêt de la méthode énergétique. La simplification est spectaculaire puisqu'on a trouvé l'équation différentielle avec une seule équation alors qu'il fallait 12 équations avec la première méthode !

Partie 2

Électrocinétique

Plan

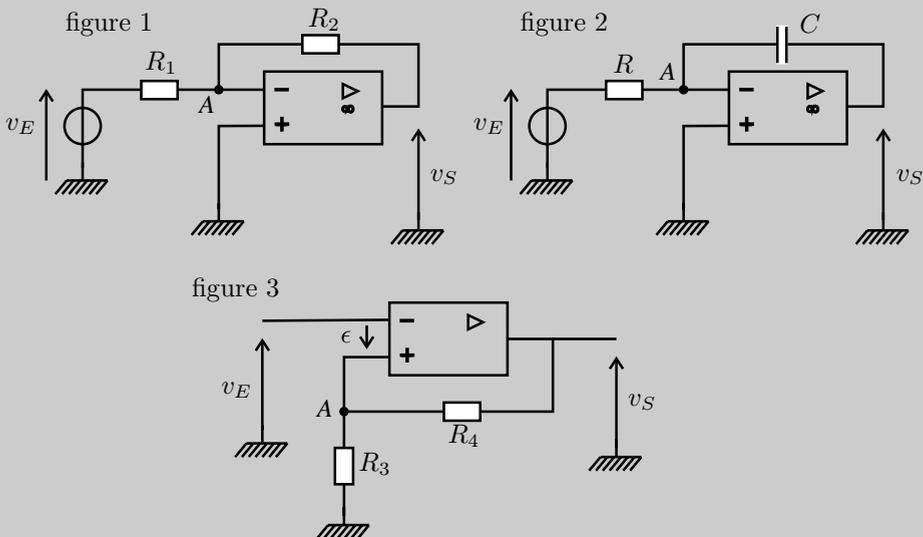
3. Électrocinétique	49
3.1 : Montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels (PC-PSI)	49
3.2 : Oscillateur de relaxation (PC-PSI)	53
3.3 : Oscillateur à pont de Wien* (PC-PSI)	56
3.4 : Oscillateur à résistance négative (PC-PSI)	59

Exercice 3.1 : Montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels (PC-PSI)

On considère trois montages avec des amplificateurs opérationnels idéaux. On

pose $\beta = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$.

1. Déterminer la fonction de transfert pour la figure 1.
2. Déterminer la relation entre $v_E(t)$ et $v_S(t)$ par deux méthodes pour la figure 2. À $t = 0$, on applique une tension continue $v_E = -V_0 < 0$ au dispositif et le condensateur est déchargé. Déterminer la tension de sortie $v_S(t)$ pour $t > 0$.
3. Pour quelle valeur de v_E la tension de sortie de la figure 3 passe-t-elle de la valeur $v_S = V_{\text{sat}}$ à $v_S = -V_{\text{sat}}$? Tracer le graphe représentant v_S en fonction de v_E . Comment appelle-t-on ce montage ?



Analyse du problème

Cet exercice reprend quelques montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels en régime linéaire ou en régime de saturation. On va voir plusieurs méthodes permettant d'obtenir l'équation différentielle.

Cours : La méthode générale pour la mise en équation dans les montages avec des amplificateurs opérationnels est d'écrire :

- le théorème de Millman ou la loi des noeuds en termes de potentiels à tous les noeuds sauf à la masse et à la sortie,
- l'équation de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel : saturation positive ou saturation négative ou régime linéaire ($\epsilon = 0$ pour un amplificateur opérationnel idéal).



1. On suppose l'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseur. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\epsilon = 0 - v_A = 0$.

On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut deux équations :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v_E}{R_1} + \frac{v_S}{R_2}$$

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\epsilon = 0 - v_A = 0$$

Comme $v_A = 0$, on a :

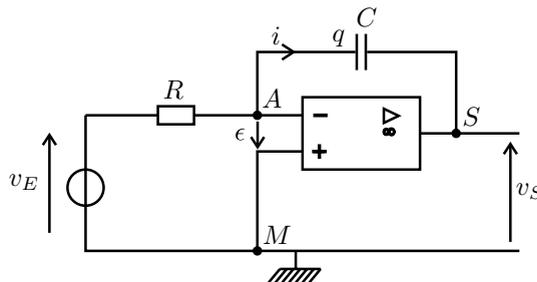
$$\frac{v_S}{v_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

C'est un montage inverseur.

2. Première méthode

On cherche à obtenir directement l'équation différentielle.

On suppose l'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseur. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\epsilon = 0 - v_A = 0$.



On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut donc deux équations :

- loi des noeuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{v_e}{R} - i = 0$$

Il faut relier l'intensité i à la tension de sortie v_S .

Soit q la charge du condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C(v_A - v_S)$.

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 = 0 - v_A$$

On a donc :

Soit :

$$\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_S}{dt} = 0$$

On obtient finalement :

$$v_S(t) - v_S(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_e(t) dt$$

On a donc un montage intégrateur. L'amplificateur opérationnel doit rester en régime linéaire pour fonctionner en intégrateur.

Deuxième méthode

On se place en régime sinusoïdal forcé pour calculer la fonction de transfert.

On pourra en déduire directement l'équation différentielle.

Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$\underline{V}_A \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{V_E}{R} + \underline{V}_S jC\omega$$

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 = 0 - V_A$$

On a alors :

$$\underline{V}_S = -\frac{V_E}{jRC\omega}$$

Soit :

$$j\omega \underline{V}_S = -\frac{V_E}{RC}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dv_S}{dt} = -\frac{v_e}{RC}$$

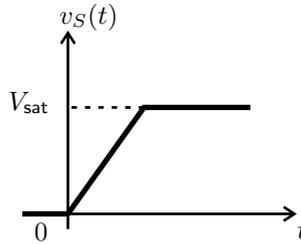
On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

À $t = 0$, $v_S = 0$ et $v_E = -V_0$. On intègre de 0 à t :

$$v_S(t) - 0 = \frac{V_0}{RC} t$$



Ce résultat est valable uniquement jusqu'à 15 V où on a une saturation de l'amplificateur opérationnel.



3. On n'a pas de rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Le régime linéaire ne peut pas être stable. On a donc uniquement un régime de saturation positive ou négative. On définit :

$$\varepsilon = v_A - v_e$$

Cours : On a plusieurs modes de fonctionnement possible de l'amplificateur opérationnel. Pour analyser un tel montage, on fait des hypothèses de fonctionnement et on vérifie les hypothèses à la fin des calculs.



1^{re} hypothèse :

Supposons l'amplificateur opérationnel en régime de saturation positive. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{v_S}{R_4}$$

Soit :

$$v_A = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_S = \beta v_S$$

- amplificateur opérationnel en régime de saturation positive : $v_S = +V_{\text{sat}}$

Remarque : On aurait pu appliquer la formule du diviseur de tension pour calculer V_A puisque $i_+ = 0$.



Vérification des hypothèses : Il faut que $\varepsilon > 0$. Comme $v_A = \beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E < \beta V_{\text{sat}}$$

2^e hypothèse :

Supposons l'amplificateur opérationnel en régime de saturation négative. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A : C'est la même équation d'avec la première hypothèse. On a :

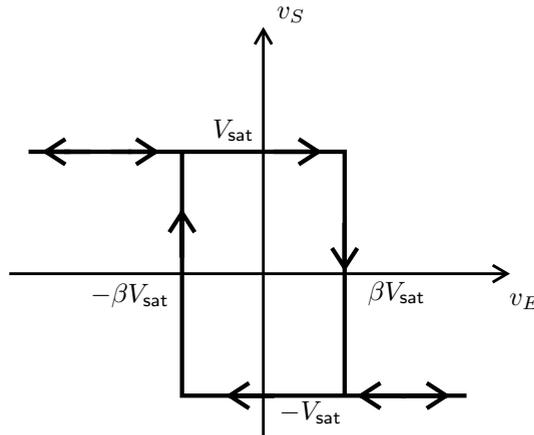
$$v_A = \beta v_S$$

- amplificateur opérationnel en régime de saturation négative : $v_S = -V_{\text{sat}}$

Vérification des hypothèses : Il faut que $\epsilon < 0$. Comme $v_A = -\beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E > -\beta V_{\text{sat}}$$

Conclusion : On a la caractéristique suivante :



Explication du sens de parcours du cycle :

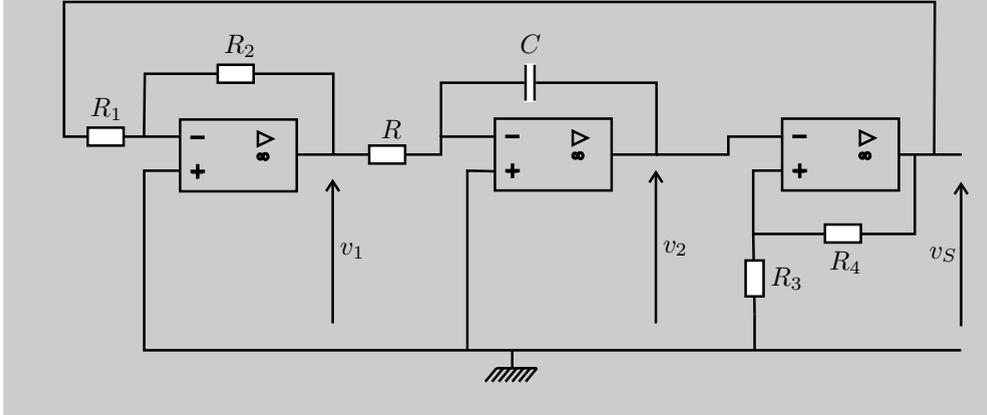
- On augmente la tension v_E à partir d'une valeur inférieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. La tension de sortie vaut V_{sat} . v_S vaut V_{sat} tant que v_E est inférieure à βV_{sat} . On a un basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$ quand v_E vaut βV_{sat} . Au delà, v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ puisque v_E est comparée à $-\beta V_{\text{sat}}$.
- On diminue la tension v_E à partir d'une valeur supérieure à βV_{sat} . La tension de sortie vaut $-V_{\text{sat}}$. v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ tant que v_E est supérieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. On a un basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} quand v_E vaut $-\beta V_{\text{sat}}$. Au delà, v_S vaut V_{sat} puisque v_E est comparée à βV_{sat} .

Une fois le basculement effectué, le seuil de comparaison change. Ce montage permet d'éviter des rebonds successifs. Le cycle est appelé cycle à hystérésis.

Exercice 3.2 : Oscillateur de relaxation (PC-PSI)

On considère le montage suivant reprenant les figures décrites dans l'exercice précédent. À l'instant $t = 0$, la tension de sortie v_S est égale à $v_S = V_{\text{sat}} = 14,7 \text{ V}$ et le condensateur est déchargé. On donne : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $R_3 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$.

1. Étudier l'évolution ultérieure des tensions $v_S(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
2. Tracer les graphes de ces trois tensions et calculer la fréquence des signaux obtenus.



Analyse du problème

Dans l'exercice précédent, on a analysé en détail le fonctionnement de chaque montage à amplificateur opérationnel. On travaille en régime transitoire. Il faut donc étudier le montage en partant de $t = 0$ avec une saturation positive d'après l'énoncé. On reste en saturation positive tant que v_2 est inférieure à βV_{sat} . On calcule le temps t_1 correspondant au premier basculement puis le temps t_2 correspondant au deuxième basculement.

Il ne faut pas utiliser les notations complexes pour analyser le montage globalement car le circuit n'est pas linéaire. Par contre, on peut utiliser les complexes pour déterminer l'équation différentielle reliant v_1 et v_2 .



1. Régime de saturation positive entre $t = 0$ et $t = t_1$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_{sat} = -6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{sat}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(0) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{sat} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le condensateur est déchargé à $t = 0$, donc :

$$v_2(t) = 69000 t$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, on a : $69000t_1 = \beta V_{\text{sat}}$. D'où :

$$t_1 = 6,81 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Régime de saturation négative entre $t = t_1$ et $t = t_2$:

La tension de sortie vaut : $v_S = -14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} = 6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(t_1) = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}(t - t_1) = -69000(t - t_1)$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $4,7 \text{ V}$ à $t = t_1$, donc :

$$v_2(t) = 4,7 - 69000(t - t_1)$$

Vérification des hypothèses : il faut que $v_2 > -\beta V_{\text{sat}}$

Pour $t = t_2$, v_2 atteint $-\beta V_{\text{sat}} = -4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} .

Pour $t = t_2$, on a : $v_2(t_2) = -4,7 = 4,7 - 69000(t_2 - t_1)$. D'où :

$$t_2 - t_1 = 1,36 \times 10^{-4} \text{ s}$$



Attention au montage intégrateur avec les conditions initiales. Il est inutile de remplacer t_1 par une expression qui peut être compliquée. Il est préférable de garder des termes en $t - t_1$.



2. Régime de saturation positive entre $t = t_2$ et $t = t_3$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} = -6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

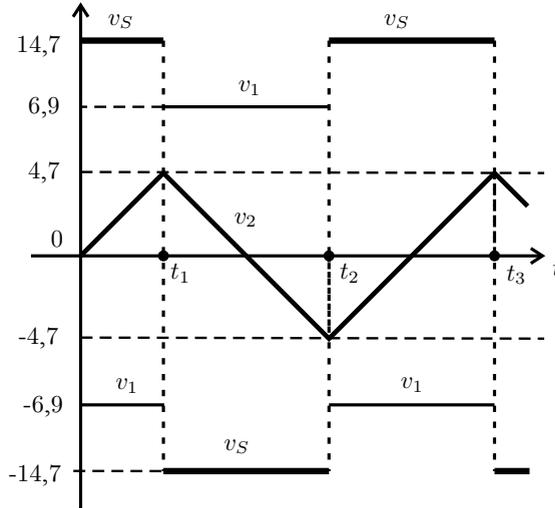
$$v_2(t) - v_2(t_2) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $-4,7 \text{ V}$ à $t = t_2$, donc :

$$v_2(t) = -4,7 + 69000(t - t_2)$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_3$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7$ V. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.



Oscillations périodiques :

On a des signaux périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

D'après l'étude précédente, on a $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. La période des oscillations est :

$$T = 2(t_2 - t_1)$$

La fréquence des signaux est donc :

$$f = \frac{1}{T} = 3670 \text{ Hz}$$

Exercice 3.3 : Oscillateur à pont de Wien* (PC-PSI)

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. La tension v_E est une tension sinusoïdale, de pulsation ω . On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et

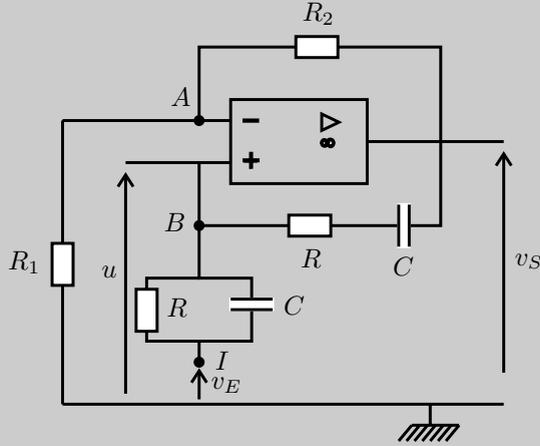
$$X = x - \frac{1}{x}$$

1. Déterminer $K = \frac{V_S}{U}$. Exprimer \underline{U} en fonction de $\underline{V_E}$ et $\underline{V_S}$. Montrer que l'on

peut écrire :
$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} \underline{V_S}$$

2. Exprimer $\underline{V_S}$ en fonction de K , X et $\underline{V_E}$.

3. Déterminer la valeur du couple (K, ω) pour laquelle on a des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



Analyse du problème

Après avoir déterminé la fonction de transfert, on va en déduire la condition pour avoir des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



1. On applique le théorème de Millman en A et comme l'amplificateur opérationnel est idéal en régime linéaire : $\epsilon = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{V_A}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_S}{R_2} \\ \underline{V_A} = \underline{U} \end{cases}$$

D'où $\underline{U} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_S}{R_2}$, soit : $\underline{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$. On en déduit :

$$K = \frac{V_S}{\underline{U}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

On applique le théorème de Millman en B :

$$\underline{V_B} \left(\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) = \frac{V_S}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \underline{V_E} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)$$



Pour bien mener à terme les calculs, il ne faut pas multiplier par l'expression conjuguée. Il est préférable de faire intervenir le plus vite possible des termes en $jx = jRC\omega$.



D'où :

$$\underline{V}_B \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \right) = \frac{\underline{V}_S}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} + \underline{V}_E (1 + jRC\omega)$$

Comme $\underline{V}_B = \underline{U}$, on a :

$$\underline{U} \left(1 + jx + \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} \right) = \frac{\underline{V}_S}{1 + \frac{1}{jx}} + \underline{V}_E (1 + jx)$$

On multiplie par $1 + \frac{1}{jx}$:

$$\underline{U} \left((1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right) + 1 \right) = \underline{V}_S + \underline{V}_E (1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right)$$

D'où :

$$\underline{U} \left(3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = \underline{V}_S + \underline{V}_E \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

On obtient finalement :

$$\underline{U} = \underline{V}_E \frac{2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)} + \frac{\underline{V}_S}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

soit :

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V}_E + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_S \quad \text{avec} \quad \underline{T} = \frac{2 + jX}{3 + jX}$$

2. D'après la question 1 : $\underline{U} = \frac{\underline{V}_S}{K}$. On a donc :

$$\frac{\underline{V}_S}{K} = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V}_E + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_S$$

Soit : $\underline{V}_S \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{3 + jX} \right) = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V}_E$. On obtient finalement :

$$\underline{V}_S = \frac{K(2 + jX)}{3 - K + jX} \underline{V}_E$$

3. Obtention de l'équation différentielle

On fait le produit en croix :

$$\underline{V}_S \left(3 - K + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = K \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \underline{V}_E$$

On multiplie par jx :

$$\underline{V}_S ((3 - K) jx + (jx)^2 + 1) = K (2jx + (jx)^2 + 1) \underline{V}_E$$

Pour en déduire l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$, il faut remplacer formellement $jx = \frac{j\omega}{\omega_0}$ par $\frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt}$, \underline{V}_E par $v_E(t)$ et \underline{V}_S par $v_S(t)$.



On en déduit directement l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$:

$$(3 - K) \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_S}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2v_S}{dt^2} + v_S = K \left(2 \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_E}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2v_E}{dt^2} + v_E \right)$$

Pour $v_E = 0$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique si $K = 3$. On a alors :

$$\frac{d^2v_S}{dt^2} + \omega_0^2 v_S = 0$$

On a donc des oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega = \omega_0$.

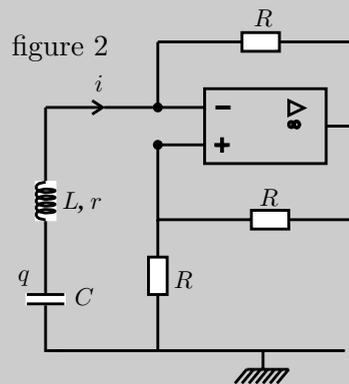
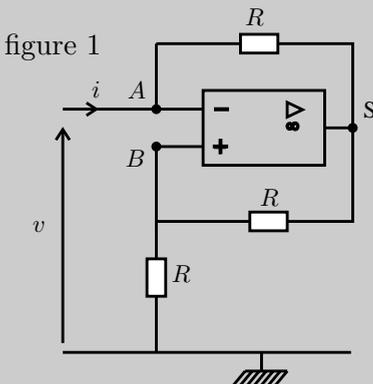
Remarque

On va étudier dans l'exercice suivant la naissance des oscillations. Le terme $(3 - K)$ ne peut pas être rigoureusement nul en pratique. Il doit être négatif pour observer la naissance des oscillations.

Exercice 3.4 : Oscillateur à résistance négative (PC-PSI)

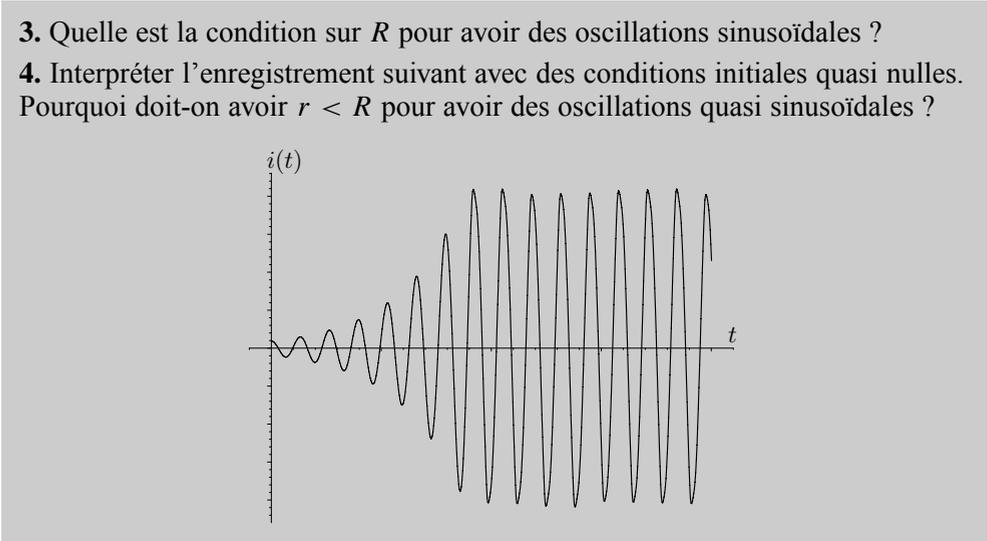
L'amplificateur opérationnel est idéal. On note V_{sat} et $-V_{\text{sat}}$ les tensions de saturation positive et négative.

1. On considère le montage de la figure 1. Donner la relation entre v et i en régime linéaire et en régime de saturation. Quelle est la condition sur i pour être en régime linéaire ? Construire le graphe $v = f(i)$. Dans quelle partie le montage est-il équivalent à une résistance négative ? Donner une interprétation physique.



2. Pour le montage de la figure 2, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ en régime linéaire et en régime de saturation.

3. Quelle est la condition sur R pour avoir des oscillations sinusoïdales ?
4. Interpréter l'enregistrement suivant avec des conditions initiales quasi nulles. Pourquoi doit-on avoir $r < R$ pour avoir des oscillations quasi sinusoïdales ?



Analyse du problème

La connaissance de la caractéristique du dipôle de la figure 1 permettant de simplifier l'étude du montage de la figure 2.

On va étudier la naissance des oscillations avec une phase initiale d'amplification où l'amplificateur opérationnel est en régime linéaire.



1. Régime linéaire :

Bilan des inconnues : v_S , v et v_B . On cherche à les exprimer en fonction de i .

Il faut donc écrire 3 équations :

théorème de Millman en B loi des noeuds en termes de potentiels en A amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire
--

On a donc :

$$\begin{cases} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ \varepsilon = v_B - v = 0 \end{cases}$$

D'où : $v_S = R \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) v = 2v$.

On en déduit que :

$$v = -Ri \text{ (en convention récepteur)}$$

Il ne faut pas oublier de **vérifier les hypothèses**. Les calculs précédents sont valables à condition d'être en régime linéaire. Il faut donc que $|v_S| \leq V_{sat}$.

Les relations précédentes donnent : $v_S = -2Ri$.

On appelle i_0 la valeur de i pour laquelle v_S vaut $-V_{sat}$:

$$i_0 = \frac{V_{sat}}{2R}$$

Pour être en régime linéaire, on doit donc avoir :

$$|i| \leq i_0$$

Régime de saturation positive ou négative :

Les trois équations s'écrivent :

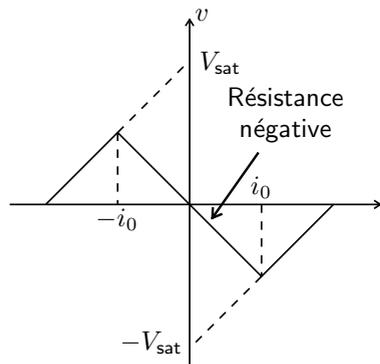
$$\begin{cases} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ v_S = \pm V_{sat} \end{cases}$$

On a alors :

$$v = Ri + V_S$$

Caractéristique :

On en déduit la caractéristique donnant v en fonction de i :



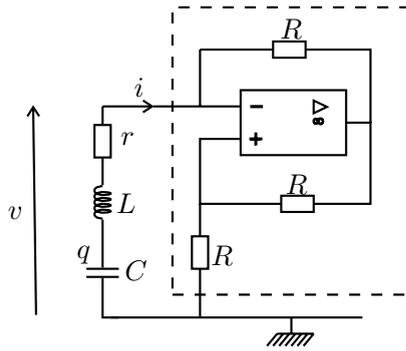
Pour $i \in [-i_0, i_0]$, le montage est équivalent à une résistance négative. C'est en fait un générateur de tension proportionnelle à l'intensité. L'énergie vient de l'alimentation de l'amplificateur opérationnel qui n'est pas représentée sur le schéma mais qu'il ne faut pas oublier en TP !

2. On a étudié dans la question précédente le dipole représenté en pointillés.

Régime linéaire :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = -Ri$$



D'après les orientations de i et q ,

$$i = -\frac{dq}{dt}$$



De très nombreuses erreurs de signe sont commises lors de la mise en équation : loi d'Ohm, relation entre i et q , relation entre q et la tension aux bornes du condensateur.



En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r - R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Le système est donc divergent si $R > r$. Ce régime reste valable tant que la tension v_S n'atteint pas la saturation de l'amplificateur opérationnel. On n'a plus la même équation différentielle une fois la saturation atteinte.

Régime de saturation positive ou négative :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = Ri + v_S$$

On est en régime de saturation avec $v_S = \pm V_{sat}$. En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r + R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

On a donc un régime convergent.

3. Pour $r = R$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

On peut donc avoir des oscillations sinusoïdales.

Remarque : Dans l'exercice précédent, on a utilisé une deuxième méthode qui utilise la fonction de transfert permettant de trouver une condition pour avoir des oscillations sinusoïdales.

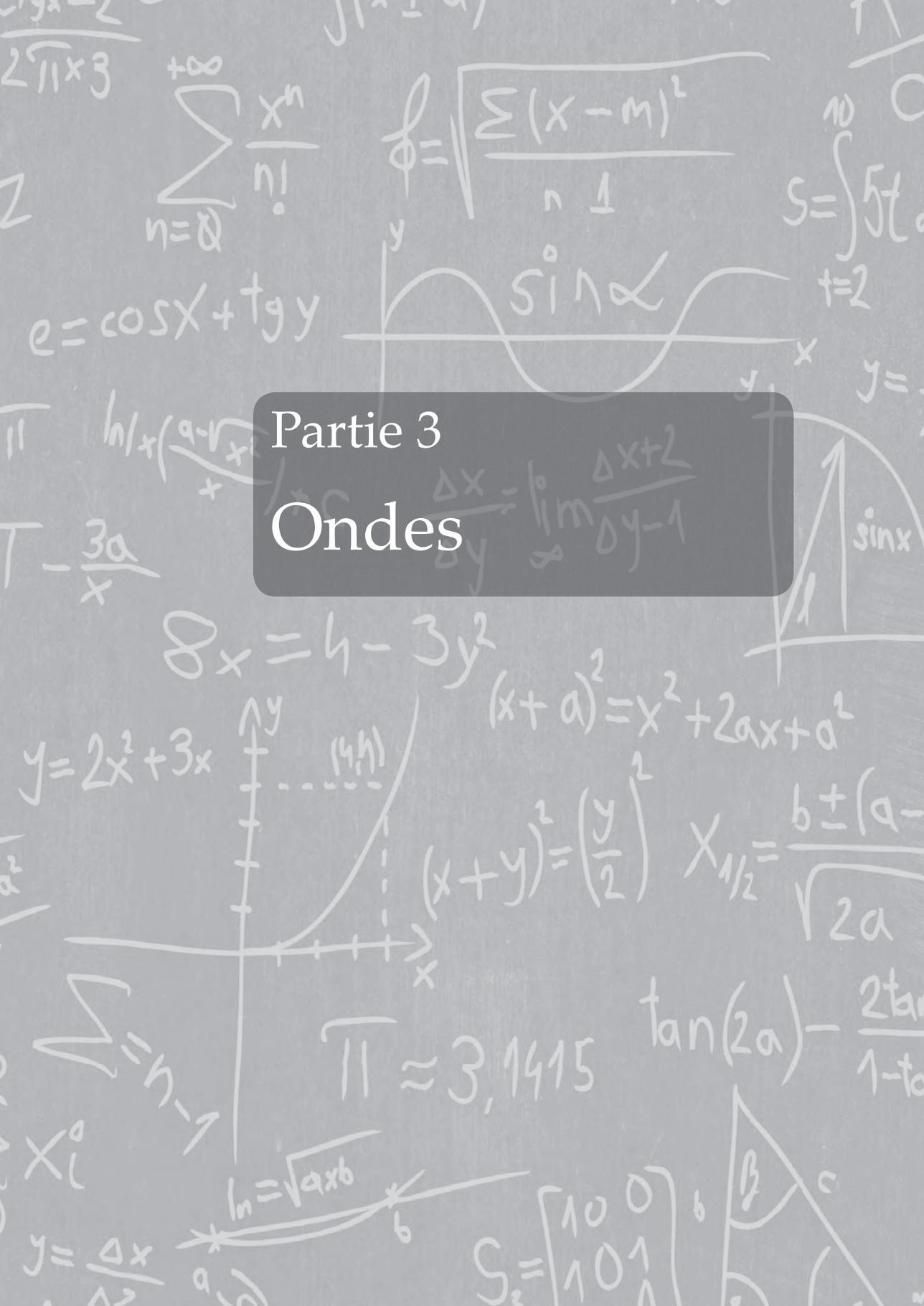


4. Analyse de la courbe :

- À $t = 0$, les conditions initiales sont quasi nulles. L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire. On a une phase d'amplification. L'énergie reçue vient de l'alimentation de l'amplificateur opérationnel. On observe sur la courbe un régime pseudo-périodique divergent.
- Il y a ensuite une saturation de l'amplificateur opérationnel. On n'a plus la même équation différentielle et on observe une phase d'amortissement.
- On a ensuite une alternance des phases d'amplification et d'amortissement. Un équilibre peut se créer et on obtient d'après la figure des solutions quasi sinusoïdales.

Conclusion :

- $r > R$: le système ne peut pas démarrer. On a toujours une phase d'amortissement et on ne peut pas observer la naissance des oscillations.
- $r = R$ est un cas théorique puisqu'en pratique, on n'a pas l'égalité parfaite.
- $r < R$: on peut observer la naissance des oscillations.



The background features a chalkboard filled with various mathematical expressions and diagrams. Visible formulas include the Taylor series for e^x , the standard deviation formula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-m)^2}{n-1}}$, a sine wave graph, the quadratic formula $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, the binomial expansion $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, the area of a triangle $S = \frac{1}{2}bh$, and the value of pi $\pi \approx 3.1415$. There are also several coordinate systems with plotted curves and lines.

Partie 3

Ondes

Plan

4. Ondes dans un milieu non dispersif	67
4.1 : Corde de Melde et ondes stationnaires (PC-PSI)	67
4.2 : Tige solide et module d'Young (PC-PSI)	73
4.3 : Équations des télégraphistes (PC-PSI)	77
5. Ondes dans un milieu dispersif	82
5.1 : Corde et dispersion (PC-PSI)	82
5.2 : Pendules de torsion (PC-PSI)	85
5.3 : Chaîne infinie de masses ponctuelles (PC-PSI)	88
6. Ondes électromagnétiques dans le vide	91
6.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting (PC-PSI)	91
6.2 : Propagation guidée et relation de dispersion (PC-PSI)	96
6.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting (PC-PSI)	100
6.4 : Réflexion sur un conducteur parfait (PC-PSI)	103
6.5 : Cavité résonante (PC-PSI)*	108
6.6 : Rayonnement dipolaire (PC)	113
7. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique	116
7.1 : Lois de Descartes (PC-PSI)	121
7.2 : Coefficients de réflexion et transmission avec une incidence normale (PC-PSI)	121
7.3 : Incidence de Brewster (PC-PSI)*	126
7.4 : Couche antireflet (PC-PSI)*	132
8. Dispersion-absorption pour des ondes électromagnétiques	135
8.1 : Effet de peau et ARQS (PC-PSI)	135
8.2 : Plasma (PC-PSI)	141
8.3 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère (PC-PSI)	146
8.4 : Polarisation des ondes (PC)	151

Ondes dans un milieu non dispersif

Exercice 4.1 : Corde de Melde et ondes stationnaires (PC-PSI)

On considère une corde vibrante de masse linéique μ , de longueur L sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox . On néglige les effets de la pesanteur.

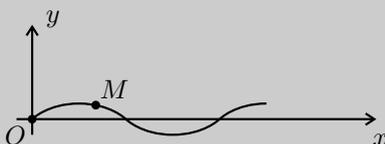
1. Établir l'équation de propagation de d'Alembert sachant que le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un, ainsi que l'angle $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox .

2. La corde est tendue par le poids d'une masse m maintenue fixée sur la poulie en $x = 0$. Un dispositif impose le mouvement $y(L,t) = b \cos \omega t$ avec $b \ll L$.

On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x) \cos \omega t$. On suppose que $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$.

Définir les noeuds et ventres de vibration.

3. Montrer que pour certaines valeurs de ω , il y a résonance et que les pulsations possibles se mettent sous la forme $\omega_n = n\omega_1$. Représenter les noeuds et les ventres de vibration pour $n = 1$ et $n = 2$.



Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde transverse sur l'axe Ox . On obtient l'équation de d'Alembert que l'on rencontre très souvent dans les exercices. Avec les conditions aux limites de l'énoncé, on a une onde stationnaire constituée de noeuds et ventres de vibration. La distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda}{2}$ alors que la distance

entre un noeud et un ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

Cours : Force exercée par une partie de la corde sur l'autre partie

Si on coupe fictivement la corde au point M d'abscisse x , la partie droite de la corde exerce sur la partie gauche une force $\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde.

D'après le principe des actions réciproques, la partie gauche exerce sur la partie droite la force $-\vec{T}(x, t)$.



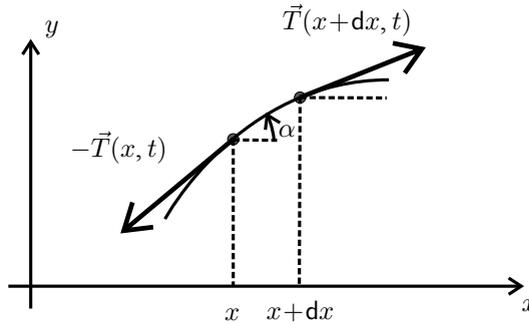
1. À l'instant t , la corde subit un déplacement transversal. On suppose que la corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . On fera donc un développement limité au premier ordre. On écrira par exemple : $\tan \alpha = \alpha$; $\cos \alpha = 1 \dots$

Système : élément de corde compris entre x et $x + dx$. On a $dx = dl \cos \alpha$. On fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1$, d'où $dx = dl$.

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- poids négligeable.
- la partie droite exerce une force $\vec{T}(x + dx, t)$ tangente à la corde en $x + dx$.
- la partie gauche exerce une force $-\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde en x .



Théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dl \vec{a} = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t)$$

La corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . L'accélération de la corde est uniquement suivant \vec{u}_y . Les angles sont fortement augmentés sur la figure pour la clarté de la représentation.

On désigne par T_x et T_y les projections de \vec{T} sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . On projette le théorème de la quantité de mouvement sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\begin{cases} 0 = -T_x(x, t) + T_x(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x, t) + T_y(x + dx, t) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx \end{cases}$$

On en déduit de la première équation que T_x est une constante. Au premier ordre, on a : $T_x = T \cos \alpha = T = cte$.

Comme \vec{T} et \vec{dl} sont colinéaires, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T}$$

D'où

$$T_y = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il reste à remplacer dans le théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On obtient l'équation de propagation, appelée ici équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

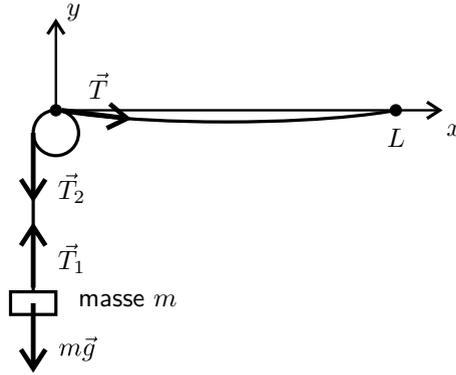
On définit la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage sur l'axe Ox et le mouvement d'un point de la corde est dans une direction orthogonale à Ox . On dit que **l'onde est transverse**.

2. La poulie et la masse m sont immobiles. La masse m est en équilibre, donc $\vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}$. La tension du fil idéal et tendu est uniforme le long de celui-ci. On a donc $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. On a vu dans la question précédente que $T_x = T = constante$. Comme la poulie est immobile, on en déduit que :

$$T = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\| = mg$$



On cherche $y(x, t)$ de la forme $f(x) \cos \omega t$. Les variables x et t sont découplées.

On dit que l'on a une **onde stationnaire**.

Pour trouver $f(x)$, il suffit de remplacer $y(x, t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$f''(x) \cos(\omega t) = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) f(x) \cos(\omega t)$$

Après simplification, on a :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

On définit k le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c}$$



Cette équation différentielle ressemble à un oscillateur harmonique. Attention : les dérivées sont par rapport à x et non par rapport au temps t . Le coefficient devant $f(x)$ est homogène à l'inverse d'une distance au carré, ce qui justifie le changement de variable avec k .



On en déduit directement la solution de cette équation différentielle :

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

On obtient donc :

$$y(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) \cos(\omega t)$$

On a deux fonctions périodiques :

- périodicité temporelle de période T . La pulsation ω est définie par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

- périodicité spatiale de période λ . Le vecteur d'onde k est défini par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma. \text{ On appelle } \sigma \text{ le nombre d'onde ou fréquence spatiale.}$$

Deux conditions aux limites

- $y(0,t) = 0 = A \cos \omega t$. On en déduit que $A = 0$.
- $y(L,t) = b \cos \omega t = B \sin kL \cos \omega t$. D'où : $B = \frac{b}{\sin kL}$.

On a donc :

$$y(x,t) = \frac{b}{\sin kL} \sin kx \cos(\omega t)$$

On a des noeuds et des ventres de vibration :

Noeuds de vibration : L'amplitude de la vibration est nulle en un noeud de vibration. On n'a pas de mouvement de la corde. Pour déterminer les abscisses correspondantes, il suffit de résoudre : $\sin kx = 0$, soit :

$$kx = n\pi$$

avec n entier. On obtient :

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

Ventres de vibration : L'amplitude de la vibration est maximale. En un point d'un ventre de vibration, on a :

$$\sin kx = \pm 1$$

D'où :

$$kx = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier. On obtient alors :

$$x_m = \frac{\pi}{2k} + m \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2 \frac{2\pi}{\lambda}} + m \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un noeud et un ventre de vibration consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

3. Si $\sin kL = \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) \rightarrow 0$, l'amplitude tend vers l'infini. On dit que l'on a résonance pour certaines valeurs de k , donc certaines valeurs de la pulsation.

En pratique, l'amplitude reste finie à cause des frottements. Le développement limité effectué précédemment n'est plus valable.

On a alors :

$$kL = \frac{\omega}{c}L = n\pi$$

avec n entier. On a résonance pour les pulsations suivantes :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

Pour $x = L$, on a $y = b \cos \omega t$. C'est pratiquement un noeud de vibration puisque l'amplitude b est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration.

Étude du cas où $n = 1$ – Excitation du premier mode propre

On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, soit une fréquence

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}. \text{ Cette fréquence est appelée fréquence fondamentale.}$$

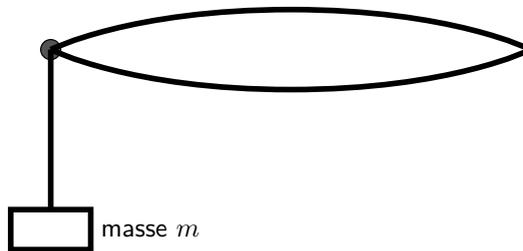
La longueur d'onde est :

$$\lambda_1 = cT_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{c}{\frac{c}{2L}} = 2L$$

On a donc la relation :

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

On a la figure suivante. On a un seul ventre de vibration.



On retient que lorsque la longueur L est égale à la moitié de la longueur d'onde, on a le premier mode propre. On peut mémoriser ce résultat facilement sachant que la distance entre deux noeuds successifs est la moitié de la longueur d'onde.



Étude du cas où $n = 2$ – Excitation du deuxième mode propre

On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$, soit une fréquence

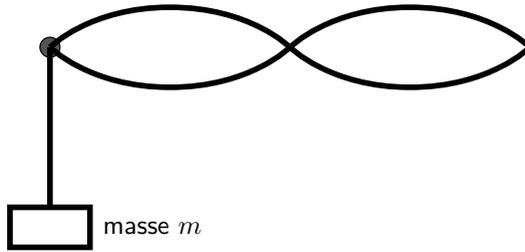
$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{c}{L}. \text{ Cette fréquence est appelée 2}^\text{e} \text{ harmonique.}$$

La longueur d'onde est :

$$\lambda_2 = cT_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{c}{\frac{c}{L}} = L$$

On a deux ventres de vibration aux abscisses : $\frac{\lambda_2}{4}$ et $\frac{3\lambda_2}{4}$.

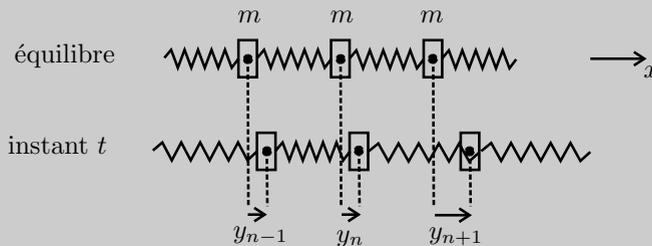
On a trois noeuds de vibration aux abscisses : $0, \frac{\lambda_2}{2}$ et λ_2 .



Si on fait l'expérience et qu'on augmente la fréquence de l'excitation, on observe sur la corde des ondes stationnaires de faible amplitude sauf pour certaines valeurs correspondant aux modes propres calculés précédemment.

Exercice 4.2 : Tige solide et module d'Young (PC-PSI)

On étudie la propagation de vibrations longitudinales dans une tige cylindrique d'axe Ox . On appelle μ la masse volumique, S la section et L la longueur du cylindre. On modélise le réseau cristallin par une chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques parallèles à Ox . Les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles m reliées entre elles par des ressorts sans masse et de constante de raideur k . A l'équilibre, toutes les masses sont équidistantes de d appelé pas du réseau. Un atome d'indice n a pour abscisse $x = nd$ à l'équilibre. On note y_n son élongation à un instant t .



1. Écrire l'équation différentielle reliant y_n, y_{n-1} et y_{n+1} .

2. On étudie le passage du discret au continu en supposant que l'élongation varie très peu d'un atome à un autre atome voisin. On définit la fonction $y(x, t)$ par $y_n(t) = y(nd, t)$. Montrer que si $d \rightarrow 0$, l'équation différentielle précédente

peut se mettre sous la forme d'une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité c en fonction de k, d et m .

3. Si on applique lentement une force F aux deux extrémités du cylindre, on a un allongement δL du cylindre. Le module d'Young E est défini par : $\frac{F}{S} = E \frac{\delta L}{L}$.

Exprimer E en fonction de μ, k, d et m . En déduire la célérité des ondes en fonction de E et μ .

4. Une onde sonore plane progressive harmonique se propage dans la tige étudiée précédemment. Le module d'Young vaut $E = 21 \times 10^{10}$ Pa et la masse volumique $\mu = 7,9 \times 10^3$ kg.m⁻³. Calculer la célérité des ondes c . La condition pour pouvoir passer du discret au continu est-elle vérifiée ?

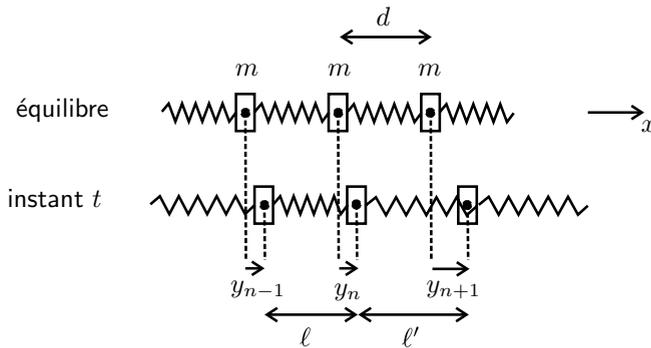
Analyse du problème

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques. Il faut faire attention à la mise en équation avec les ressorts. Si la distance entre les atomes est très faible devant la longueur d'onde, on peut étudier le passage du discret au continu en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2.



1. Système : masse m d'indice n .

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, t)$ terrestre galiléen.



Bilan des forces qui s'exercent sur la masse m d'indice n :

- Force exercée par le ressort située entre la masse $(n - 1)$ et la masse n : $-k(\ell - d)\vec{u}_x$. On a un signe $-$ puisque la force est dirigée vers $-\vec{u}_x$ si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell = d + y_n - y_{n-1}$. L'allongement est donc : $\ell - d = y_n - y_{n-1}$.
- Force exercée par le ressort située entre la masse n et la masse $n + 1$: $+k(\ell' - d)\vec{u}_x$. On a un signe $+$ puisque la force est dirigée vers \vec{u}_x si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell' = d + y_{n+1} - y_n$. L'allongement est donc : $\ell' - d = y_{n+1} - y_n$.



Il faut faire très attention aux signes et aux calculs des allongements des ressorts.



Théorème de la quantité de mouvement :

$$m\ddot{y}_n = -k(y_n - y_{n-1}) + k(y_{n+1} - y_n)$$

2. On pose $y_n(t) = y(nd, t)$

On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$y_{n+1}(t) = y(nd + d, t) = y(nd, t) + d \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{nd} + \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{nd}$$

$$y_{n-1}(t) = y(nd - d, t) = y(nd, t) - d \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{nd} + \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{nd}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$m \frac{\partial^2 y(nd, t)}{\partial t^2} = -k \left(d \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{nd} - \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{nd} \right) + k \left(d \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{nd} + \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{nd} \right)$$

On obtient alors :

$$m \frac{\partial^2 y(nd, t)}{\partial t^2} = kd^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{nd}$$

Comme nd est l'abscisse x de l'atome d'indice n , on en déduit finalement :

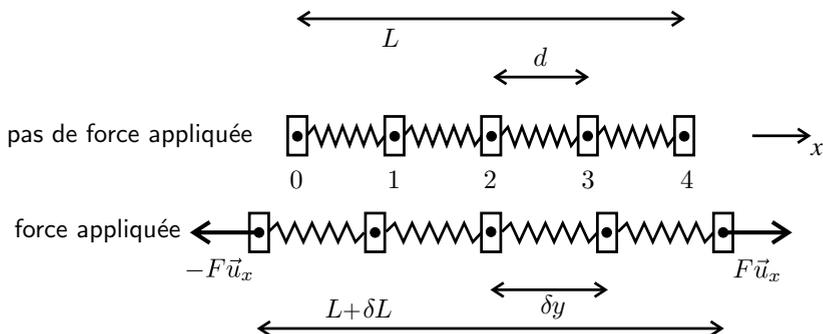
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{kd^2}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

C'est une équation de propagation appelée équation de d'Alembert à une dimension.

La célérité c est définie par :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

3. Lorsqu'il y n'a pas de force appliquée aux extrémités du solide, la distance entre deux atomes consécutifs est d à l'équilibre.



Lorsqu'on applique lentement une force F aux deux extrémités du solide, la distance entre deux atomes consécutifs est $d + \delta y$ à l'équilibre.

On appelle N le nombre de ressorts. Sur le schéma $N = 4$. En pratique, le nombre d'atomes N est très supérieur à 1. L'ordre de grandeur est le nombre d'Avogadro.

L'équilibre de la masse d'indice 0 et de la masse d'indice N s'écrit : $F = k\delta y$.

La contrainte est : $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{k}{S}\delta y$.

L'allongement total du solide est $\delta L = N\delta y$. On en déduit :

$$\frac{F}{S} = \frac{k}{SN}\delta L$$

Pour exprimer E en fonction de μ , k , d et m , il faut éliminer S et N .

On a deux équations :

- La masse totale du solide est : $\mu SL = (N + 1)m \approx Nm$. On a donc :

$$\frac{S}{N} = \frac{m}{\mu L} \quad (\text{éq. 1})$$

- La longueur totale du solide est : $L = Nd$. On a donc :

$$N^2 = \frac{L^2}{d^2} \quad (\text{éq. 2})$$

En faisant le produit des équations (1) et (2), on a :

$$SN = \frac{mL}{\mu d^2}$$

On en déduit la contrainte :

$$\frac{F}{S} = \frac{k\mu d^2}{m} \frac{\delta L}{L} = E \frac{\delta L}{L}$$

Le module d'Young est :

$$E = \frac{k\mu d^2}{m}$$

La célérité des ondes dans le solide est :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

- 4. La célérité des ondes dans l'acier vaut :

$$c = 5,2 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

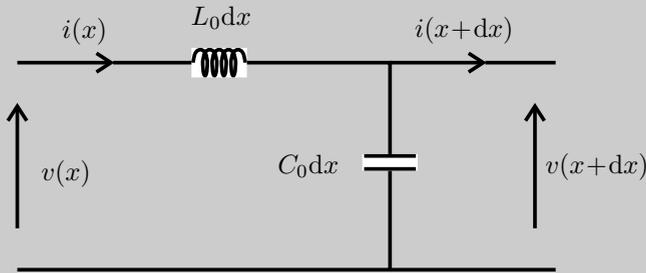
Les ondes sonores ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Pour pouvoir passer du discret au continu, il faut que la distance interatomique soit très petite devant la longueur d'onde λ . La condition la plus forte est pour la fréquence de 20 kHz. La longueur d'onde vaut alors :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = 26 \text{ cm}$$

Cette condition est toujours vérifiée puisque la distance entre deux atomes est de l'ordre de 10^{-10} m.

Exercice 4.3 : Équation des télégraphistes (PC-PSI)

Un câble coaxial est assimilé à un circuit à constantes réparties, de sorte qu'une longueur dx de câble est représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



où L_0, C_0 représentent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble. Dans la section d'abscisse x du câble, le courant vaut $i(x, t)$ et la différence de potentiel $v(x, t)$. Dans la section d'abscisse $x + dx$ du câble, le courant vaut $i(x + dx, t)$ et la différence de potentiel $v(x + dx, t)$.

1. Établir le système d'équations reliant les grandeurs $i(x, t)$ et $v(x, t)$. En déduire les équations vérifiées par les fonctions $i(x, t)$ et $v(x, t)$. En déduire c la vitesse de propagation des ondes.

2. On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x > 0$. On pose $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0 \exp(j(\omega t - kx))$. Montrer que \underline{v} et \underline{i} sont en phase. Établir la relation de dispersion. On pose $\underline{Z}_C = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$. Exprimer \underline{Z}_C en fonction de L_0 et C_0 .

Calculer l'impédance caractéristique de la ligne \underline{Z}_C et c la vitesse de propagation des ondes sachant que $L_0 = 0,28 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$; $C_0 = 112 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. Que devient la relation $\frac{\underline{v}}{\underline{i}}$ pour une onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x < 0$?

4. L'extrémité de la ligne ($x = L$) est fermée sur une impédance complexe \underline{Z}_r . On pose $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx)) + I'_0 \exp(j(\omega t + kx))$. En déduire $\underline{v}(x, t)$. Calculer à l'extrémité du câble, le coefficient de réflexion en tension puis le coefficient de réflexion en intensité. Interpréter les cas particuliers : $\underline{Z}_r = 0$, $\underline{Z}_r \rightarrow \infty$ et $\underline{Z}_r = \underline{Z}_C$.

Analyse du problème

L'approximation des régimes quasi stationnaires est valable si la dimension du circuit est négligeable devant la longueur d'onde, ce qui est le cas pour un élément de longueur dx . On peut donc appliquer la loi des noeuds et la loi des mailles pour obtenir le système d'équations différentielles.



1. Loi des noeuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + C_0 dx \frac{\partial v}{\partial t}$$

Remarque : on devrait écrire $C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x + dx, t)$.

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$C_0 dx \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x + dx, t) \right] = C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, t) + C_0 dx \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx$$

Le deuxième terme $C_0 dx \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx$ est un infiniment petit du deuxième ordre (produit de deux infiniment petits d'ordre 1), alors que le premier terme $C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, t)$ est un infiniment petit du premier ordre. On néglige tous les termes d'ordre supérieur à 1, ce qui revient à négliger le deuxième terme devant le premier terme.



Comme $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, on en déduit que :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial v}{\partial t} \text{ (éq. 1)}$$

Loi des mailles :

$$v(x, t) = v(x + dx, t) + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

Comme $v(x + dx, t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, on en déduit que :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \text{ (éq. 2)}$$

On calcule $\left(\frac{\partial(1)}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$

On calcule $\left(\frac{\partial(1)}{\partial t}\right) : \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

On calcule $\left(\frac{\partial(2)}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$

On calcule $\left(\frac{\partial(2)}{\partial t}\right) : \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

Les variables x et t sont indépendantes. On peut permuter l'ordre des dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$



Par élimination, on obtient :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_0 \left[-L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right]$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L_0 \left[-C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right]$$

On en déduit les équations d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

La vitesse de propagation des ondes est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

2. On reporte $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx))$

et $\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0 \exp(j(\omega t - kx))$ dans les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} -jkI_0 = -C_0(j\omega V_0) \\ -jkV_0 = -L_0(j\omega I_0) \end{cases}$$

ce qui donne : $\frac{V_0}{I_0} = \frac{k}{C_0\omega} = \frac{L_0\omega}{k}$.

On a donc \underline{v} et \underline{i} en phase. On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega = kc$$

L'impédance caractéristique du câble est :

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{k}{C_0\omega} = \frac{1}{C_0c} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

Application numérique : $\underline{Z}_C = 50 \Omega$ et $c = 1,79 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

3. Pour une onde se propageant dans l'autre sens :

$\underline{i}(x,t) = I_0 \exp(j(\omega t + kx))$ et $\underline{v}(x,t) = V_0 \exp(j(\omega t + kx))$.

En reportant dans l'équation (1), on obtient :

$$jkI_0 = -C_0(j\omega V_0)$$

On en déduit que :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{V_0}{I_0} = -\frac{k}{C_0\omega} = -\frac{L_0\omega}{k} = -\underline{Z}_C$$

Remarque : Il faut bien distinguer l'onde incidente (intensité notée \underline{i}_i) et l'onde réfléchie (intensité notée \underline{i}_r).

On a vu que pour l'onde incidence :

$$\underline{v}_i(x,t) = \underline{Z}_C \underline{i}_i(x,t)$$

et pour l'onde réfléchie :

$$\underline{v}_r(x,t) = -\underline{Z}_C \underline{i}_r(x,t)$$



4. La tension se déduit de l'intensité en utilisant l'impédance caractéristique :

$$\underline{v}(x,t) = \underline{Z}_C \underline{i}_i(x,t) - \underline{Z}_C \underline{i}_r(x,t)$$

On a donc :

$$\underline{v}(x,t) = \underline{Z}_C [I_0 \exp(j(\omega t - kx)) - I'_0 \exp(j(\omega t + kx))]$$

À l'extrémité de la ligne, la loi d'Ohm donne :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_r \underline{i}(L,t)$$

Le théorème de superposition permet de calculer $\underline{i}(L,t)$ en fonction de $\underline{i}_i(L,t) = I_0 \exp(j(\omega t - kL))$ et de $\underline{i}_r(L,t) = I'_0 \exp(j(\omega t + kL))$:

$$\underline{i}(L,t) = \underline{i}_i(L,t) + \underline{i}_r(L,t)$$



Il faut bien mettre un signe + entre $\underline{i}_i(L,t)$ et $\underline{i}_r(L,t)$ puisqu'on applique le théorème de superposition.



On a donc :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_r [I_0 \exp(j(\omega t - kL)) + I'_0 \exp(j(\omega t + kL))]$$

Soit :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_C [I_0 \exp(j(\omega t - kL)) - I'_0 \exp(j(\omega t + kL))]$$

On en déduit que :

$$[\underline{Z}_C - \underline{Z}_r] I_0 \exp(j(\omega t - kL)) = [\underline{Z}_r + \underline{Z}_C] I'_0 \exp(j(\omega t + kL))$$

À l'extrémité du câble, le coefficient de réflexion en intensité est :

$$\underline{\rho}_I = \frac{\underline{i}_r(L,t)}{\underline{i}_i(L,t)} = \frac{\underline{Z}_C - \underline{Z}_r}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_r}$$

On en déduit le coefficient de réflexion en tension :

$$\underline{\rho}_V = \frac{\underline{v}_r(L,t)}{\underline{v}_i(L,t)} = \frac{-\underline{Z}_C \underline{i}_r}{\underline{Z}_C \underline{i}_i} = -\underline{\rho}_I$$

Cas particuliers :

- $\underline{Z}_r = 0$: le câble est court-circuité à son extrémité. Alors $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = 1$. L'onde incidente est entièrement réfléchie.
- $\underline{Z}_r \rightarrow \infty$: le câble est en circuit ouvert à son extrémité. Alors $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = -1$. L'onde incidente est entièrement réfléchie.
- $\underline{Z}_r = \underline{Z}_C$: $\underline{\rho}_I = \underline{\rho}_V = 0$. Il n'y a pas d'onde réfléchie. L'onde incidente est absorbée au bout de la ligne : c'est l'adaptation d'impédance.

5

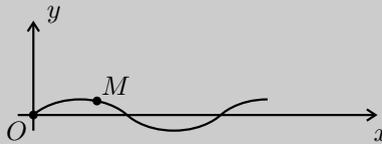
Ondes dans un milieu dispersif

Exercice 5.1 : Corde et dispersion (PC-PSI)

On considère une corde vibrante de masse linéique μ , de longueur L sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox . On néglige les effets de la pesanteur. Cette corde est soumise à une force de frottement visqueux. Un élément de longueur dl subit une force de frottement : $-\lambda dl \vec{v}$.

1. Établir l'équation de propagation sachant que le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un.

2. On étudie une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des $x > 0$. On cherche en notation complexe \underline{y} de la forme : $y(x,t) = A \exp(j(\omega t - \underline{k}x + \phi))$. Déterminer la relation de dispersion. En déduire la solution de l'équation de propagation. Interpréter physiquement.



Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde transverse sur l'axe Ox . Pour établir la relation de dispersion, il faut déterminer l'équation de propagation.



1. À l'instant t , la corde subit un déplacement transversal. On suppose que la corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox .

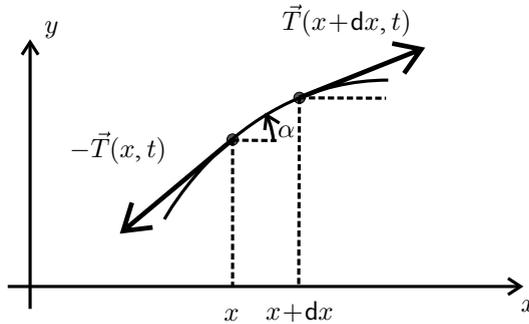
Système : élément de corde compris entre x et $x + dx$. On a $dx = dl \cos \alpha \approx dl$.

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- poids négligeable
- la partie droite exerce une force $\vec{T}(x + dx, t)$ tangente à la corde en $x + dx$.

- la partie gauche exerce une force $-\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde en x .
- force de frottement visqueux $-\lambda dx \vec{v} = -\lambda dx \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y$.



Théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dl \vec{a} = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t) - \lambda dx \vec{v}$$

L'accélération de la corde est uniquement suivant \vec{u}_y .

On projette le théorème de la quantité de mouvement sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\begin{cases} 0 = -T_x(x, t) + T_x(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x, t) + T_y(x + dx, t) - \lambda dx \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx - \lambda dx \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

On en déduit de la première équation que T_x est une constante. Au premier ordre, on a : $T_x = T \cos \alpha = T = cte$.

Comme \vec{T} et \vec{dl} sont colinéaires, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x}$$

On en déduit :

$$T_y = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

Soit :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il reste à remplacer dans le théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \lambda dx \frac{\partial y}{\partial t}$$

On obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{T} \frac{\partial y}{\partial t}$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

2. On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des $x > 0$. Elle peut se mettre sous la forme en notation complexe :

$$\underline{y}(x, t) = A \exp(j(\omega t - \underline{k}x + \phi))$$

Cours : Méthode pour obtenir la relation de dispersion : reporter \underline{y} dans l'équation de propagation pour obtenir la relation entre \underline{k} et ω .

Attention : \underline{k} est complexe. Il faut ensuite déterminer la partie réelle et la partie imaginaire.



On injecte \underline{y} dans l'équation de propagation :

$$-k^2 \underline{y} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \underline{y} = \frac{\lambda}{T} j \omega \underline{y}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{\lambda \omega}{T}$$

Pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{k} , on pose $\underline{k} = k_1 + j k_2$. On a alors :

$$(k_1 + j k_2)^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2j k_1 k_2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{\lambda \omega}{T}$$

Il reste à écrire la partie réelle et la partie imaginaire. On a donc :

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2k_1 k_2 = -\frac{\lambda \omega}{T} \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a : $k_2^2 = \frac{\lambda^2 \omega^2}{4T^2 k_1^2}$ que l'on réinjecte dans la première équation :

$$k_1^2 - \frac{\lambda^2 \omega^2}{4T^2 k_1^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On multiplie par k_1^2 pour obtenir une équation du second degré en k_1^2 :

$$k_1^4 - k_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\lambda^2 \omega^2}{4T^2} = 0$$

Le discriminant vaut : $\Delta = \frac{\omega^4}{c^4} + \frac{\lambda^2 \omega^2}{T^2} > 0$.

On a deux racines réelles : $\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

On ne garde que la première solution puisque $k_1^2 > 0$ (k_1 réel). On obtient donc :

$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c^2} + \sqrt{\Delta}}{2}}$$

On a alors : $\underline{y} = A \exp(-j(jk_2)x) \exp(j(\omega t - k_1x + \phi))$.

En simplifiant, on a :

$$\underline{y} = A \exp(k_2x) \exp(j(\omega t - k_1x + \phi))$$

Le produit k_1k_2 est strictement négatif.

La solution liée à $k_1 > 0$ correspond à une onde qui se propage dans le sens des $x > 0$: c'est une onde plane progressive harmonique amortie puisque $k_2 < 0$.

La solution liée à $k_1 < 0$ correspond à une onde qui se propage dans le sens des $x < 0$: c'est une onde plane régressive harmonique amortie puisque $k_2 > 0$.

La vitesse de phase est définie par $v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$. Elle dépend de la pulsation. Le

milieu est donc dispersif. La vitesse de groupe est définie par : $v_g = \frac{d\omega}{dk_1}$.

Cours : La partie réelle du vecteur d'onde est le terme de dispersion.

La partie imaginaire du vecteur d'onde est le terme d'absorption qui correspond à un amortissement de l'onde.

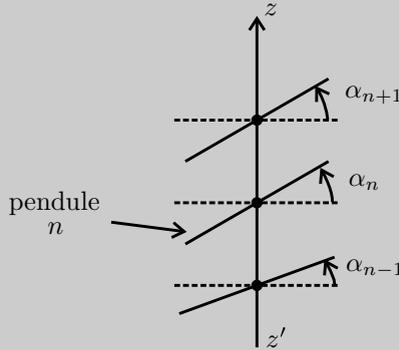
Exercice 5.2 : Pendules de torsion (PC-PSI)

On considère une chaîne infinie de pendules de torsion de constante de torsion C couplés par des fils de torsion. Le pendule de torsion n situé dans un plan perpendiculaire à l'axe z/z est repéré par son abscisse $z = na$ et on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe z/z . Il subit du fil situé entre le pendule n et le pendule $(n + 1)$ un moment égal à : $C(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.

On étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens $z > 0$ de la forme :

$$\underline{\alpha}_n = \alpha_0 \exp(i(\omega t - kz_n))$$

1. Établir la relation de dispersion et montrer qu'il y a un propagation si $\omega \leq \omega_{\max}$. Exprimer ω_{\max} en fonction de C et J .
2. Si $0 < k \ll \frac{\pi}{a}$, exprimer la vitesse de phase en fonction en fonction de a, C et J . Conclusion.



Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) sur l'axe Oz . Pour établir la relation de dispersion, il faut déterminer l'équation de propagation et reporter $\underline{\alpha}_n$ dans l'équation de propagation.



1. le système étudié est le pendule de torsion n .
Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Bilan des actions :

- On suppose la liaison parfaite : le moment des actions de liaison est nul.
- Le moment du poids est nul car le barycentre du pendule est sur l'axe $z'z$.
- Couple exercé par le fil situé entre le pendule n et le pendule $n + 1$: $C(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
- Couple exercé par le fil situé entre le pendule n et le pendule $n - 1$: $-C(\alpha_n - \alpha_{n-1})$.

Le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe $z'z$ pour le pendule n s'écrit en notation complexe :

$$J \frac{\partial^2 \underline{\alpha}_n}{\partial t^2} = C (\underline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_n) - C (\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_{n-1})$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$J \frac{\partial^2 \underline{\alpha}_n}{\partial t^2} + 2C \underline{\alpha}_n = C (\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\alpha}_{n-1})$$

Relation de dispersion

Pour obtenir la relation entre ω et k , il suffit de reporter $\underline{\alpha}_n = \alpha_0 \exp(i(\omega t - kz_n))$ dans l'équation de propagation.

On obtient alors :

$$-J\omega^2 \underline{\alpha}_n + 2C \underline{\alpha}_n = C \underline{\alpha}_n (\exp(-ika) + \exp(ika))$$

En simplifiant, on obtient :

$$-J\omega^2 + 2C = 2C \cos ka$$

D'où :

$$\omega^2 = \frac{2C}{J} (1 - \cos ka) = \frac{4C}{J} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{C}{J}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

On doit donc avoir : $\omega \leq 2\sqrt{\frac{C}{J}}$.

La pulsation maximale est donc :

$$\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{C}{J}}$$

2. On se place dans le cas où $0 < k \ll \frac{\pi}{a}$.

La relation de dispersion s'écrit alors : $\omega = 2\sqrt{\frac{C}{J}} \sin \frac{ka}{2} \approx 2\sqrt{\frac{C}{J}} \frac{ka}{2}$.

On a alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}} ka$$

La vitesse de phase est :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{C}{J}}$$

La vitesse de phase est indépendante de la pulsation. Il n'y a pas de dispersion.

La vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ est donc nulle.

Exercice 5.3 : Chaîne infinie de masses ponctuelles (PC-PSI)

On considère une chaîne infinie de masses m reliées par des ressorts de constante de raideur k . La masse d'indice n est repérée par son abscisse $x_n = na$. Les masses sont susceptibles de se déplacer suivant la direction $x'x$. On note $x_n(t) = na + s_n(t)$.

On étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique dans le sens des $x > 0$. On pose en notation complexe : $\underline{s}_n = A \exp(i(\omega t - kna))$.

1. Établir la relation de dispersion.
2. On remplace la masse m en $n = 0$ par une masse M . Une onde incidente se propage dans le sens des $x > 0$ et arrive en $x = 0$. Elle crée une onde réfléchie et une onde transmise. Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission \underline{r} et \underline{t} . Étudier les cas limites où $M = m$ et $M \rightarrow \infty$.

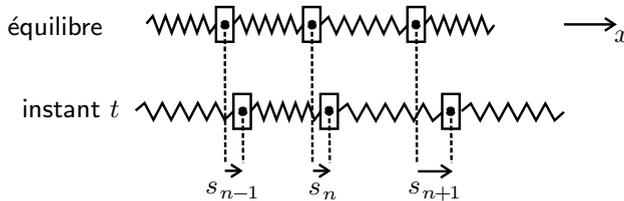
Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) sur l'axe Ox . Pour établir la relation de dispersion, il faut déterminer l'équation de propagation et reporter \underline{s}_n dans l'équation de propagation.

Cours : Mise en équation des ressorts

La mise en équation avec des ressorts pose souvent des difficultés. Il faut prendre l'initiative d'introduire les longueurs à vide des ressorts et de faire deux schémas.

- Premier schéma à l'équilibre : Comme les ressorts sont dans un plan horizontal, la longueur à l'équilibre de chaque ressort est égale à la longueur à vide.
- Deuxième schéma à un instant t . On repère le déplacement de chaque masse m par rapport à la position d'équilibre.



Bilan des forces qui s'exercent sur la masse m d'indice n

- Le poids et la réaction se compensent. On suppose qu'il n'y a pas de frottement et le mouvement se fait dans un plan horizontal.
- Force exercée par le ressort située entre la masse $(n - 1)$ et la masse n : $-k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$. On a un signe $-$ puisque la force est dirigée vers $-\vec{u}_x$ si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell = \ell_0 + s_n - s_{n-1}$. L'allongement est donc : $\ell - \ell_0 = s_n - s_{n-1}$.
- Force exercée par le ressort située entre la masse n et la masse $n + 1$: $+k(\ell' - \ell_0)\vec{u}_x$. On a un signe $+$ puisque la force est dirigée vers \vec{u}_x si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell' = \ell_0 + s_{n+1} - s_n$. L'allongement est donc : $\ell' - \ell_0 = s_{n+1} - s_n$.



1. On applique le théorème de la quantité de mouvement à la masse m d'indice n en projection sur l'axe $x'x$:

$$m\ddot{s}_n = -k(s_n - s_{n-1}) + k(s_{n+1} - s_n)$$

On passe en notation complexe :

$$m\ddot{\underline{s}}_n = -k(\underline{s}_n - \underline{s}_{n-1}) + k(\underline{s}_{n+1} - \underline{s}_n)$$

On a alors :

$$-m\omega^2 \underline{s}_n = -k\underline{s}_n(1 - \exp(ika)) + k\underline{s}_n(\exp(-ika) - 1)$$

On en déduit que :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}(2 - \exp(ika) - \exp(-ika)) = \frac{2k}{m}(1 - \cos ka)$$

Soit :

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

La relation de dispersion est :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

Il y a propagation si $\omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}$.

2. Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission, il faut un système à deux équations et deux inconnues.

Pour l'onde incidente, on a : $\underline{s}_{ni} = A \exp(i(\omega t - kna))$ avec $n \leq 0$.

Pour l'onde réfléchie, on a : $\underline{s}_{nr} = \underline{r}A \exp(i(\omega t + kna))$ avec $n \leq 0$.



On définit \underline{r} le coefficient de réflexion pour l'onde réfléchie. Il faut écrire $+kna$ car l'onde se propage dans le sens des $x < 0$.



Pour l'onde transmise, on a : $\underline{s}_{nt} = \underline{t}A \exp(i(\omega t - kna))$ avec $n \geq 0$.

Pour calculer \underline{s}_n , il faut utiliser le théorème de superposition.

• Si $n \leq 0$, on a une onde incidente et une onde réfléchie. D'où :

$$\underline{s}_n = \underline{s}_{ni} + \underline{s}_{nr}$$

• Si $n \geq 0$, on a une onde transmise. D'où : $\underline{s}_n = \underline{s}_{nt}$.

• Si $n = 0$, on a alors $\underline{s}_0 = \underline{s}_{0i} + \underline{s}_{0r} = \underline{s}_{0t}$.

On a la première équation :

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \text{ (eq.1)}$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique à la masse M d'indice $n = 0$ pour obtenir la deuxième équation :

$$M \frac{d^2 s_0}{dt^2} = -k(s_0 - s_{-1}) + k(s_1 - s_0) \quad (\text{eq.2})$$

On passe en notation complexe :

$$-M\omega^2 \underline{s}_0 = -2k\underline{s}_0 + k\underline{s}_{-1} + k\underline{s}_1$$

On a vu que : $\underline{s}_0 = \underline{s}_{0t}$; $\underline{s}_{-1} = \underline{s}_{-1,i} + \underline{s}_{-1,r}$ et $\underline{s}_1 = \underline{s}_{1t}$.

On en déduit que :

$$-M\omega^2 \underline{t} = -2k\underline{t} + k(\exp(-i(-ka)) + k\underline{r} \exp \exp(i(-ka))) + k\underline{t} \exp(-ika)$$

D'où :

$$-M\omega^2 \underline{t} = -2k\underline{t} + k \exp(ika) + k(\underline{t} - 1) \exp(-ika) + k\underline{t} \exp(-ika)$$

En simplifiant, on a : $-M\omega^2 \underline{t} = -2k\underline{t} + 2k\underline{t} \exp(-ika) + 2ik \sin ka$

On en déduit que : $\underline{t}(-M\omega^2 + 2k - 2k \exp(-ika)) = 2ik \sin ka$

Le coefficient de transmission est :

$$\underline{t} = \frac{2ik \sin ka}{-M\omega^2 + 2k - 2k \cos ka + 2ik \sin ka}$$

1^{er} cas particulier : $M = m$

On a vu que $\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$.

On simplifie le terme $-M\omega^2 + 2k - 2k \cos ka$ rencontré précédemment.

On a donc : $-M\omega^2 + 2k - 2k \cos ka = -4k \sin^2 \frac{ka}{2} + 2k(1 - \cos ka)$

D'où : $-4k \sin^2 \frac{ka}{2} + 2k(1 - \cos ka) = -4k \sin^2 \frac{ka}{2} + 4k \sin^2 \frac{ka}{2} = 0$

On a alors une expression simplifiée du coefficient de transmission :

$$\underline{t} = \frac{2ik \sin ka}{2ik \sin ka}$$

On a donc : $\underline{t} = 1$

C'est tout à fait normal. Il n'y a pas de réflexion. Toute l'onde incidente est entièrement transmise.

2^e cas particulier : $M \rightarrow \infty$

On en déduit que $\underline{t} \rightarrow 0$ et $\underline{r} \rightarrow 1$. On a une réflexion totale sur un mur.

Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 6.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting (PC-PSI)

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage suivant l'axe Ox . Le champ électrique est polarisé suivant \vec{u}_y .

1. Établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.
2. Déterminer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
3. Déterminer le flux du champ magnétique à travers un cadre carré de côté $a = 1$ m, formé de N spires et situé dans un plan perpendiculaire à \vec{u}_z pour une fréquence $f = 100$ MHz.
4. Que se passe-t-il si la fréquence vaut $f = 160$ kHz ?

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une OPPM polarisée suivant \vec{u}_y . On verra une méthode systématique pour établir l'équation de propagation. On pourra en déduire la relation de dispersion.

Le calcul du champ magnétique peut se faire avec les opérateurs $\text{rot } \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ ou $\text{rot } \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ puisqu'on a une OPPM. Dans le cas contraire, il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

Attention à bien revenir en grandeurs réelles pour calculer le vecteur de Poynting.

On va comparer la longueur d'onde à la dimension a du cadre et remarquer que l'on peut faire un calcul simplifié si la longueur d'onde est très grande devant a .

Cours : Définition d'une onde plane progressive monochromatique

On étudie la propagation du champ électrique suivant l'axe Ox .

L'onde est **plane** si le champ électrique prend des valeurs uniformes pour tout plan perpendiculaire à la direction de propagation (ici direction \vec{u}_x). Le plan perpendiculaire à la direction de propagation est appelé **plan d'onde**.

L'onde est **progressive** si le champ électrique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x(x - ct) \\ E_y(x - ct) \\ E_z(x - ct) \end{cases}$$

On appelle c la célérité de l'onde.

L'onde est progressive, polarisée suivant \vec{u}_y , donc

$$\vec{E} = E(x - ct)\vec{u}_y$$

L'onde est plane, progressive, harmonique et polarisée suivant \vec{u}_y , donc le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

Pour une OPPM dans le vide, on va démontrer que

$$\omega = kc$$

En notation complexe, on a : $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y$.



1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

Equation de Maxwell-Flux : $\text{div } \vec{B} = 0$

Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On n'a pas de charges et de courants volumiques.

Cours : Méthode systématique pour écrire l'équation de propagation en électromagnétisme

On calcule le rotationnel du rotationnel du champ électrique ou du champ magnétique. Il faut connaître par coeur la formule :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$



On déduit des équations de Maxwell que :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

puisque $\text{div} \vec{E} = 0$ dans le vide.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

Cours : Méthode pour obtenir la relation de dispersion

Dans l'exercice, le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

Il suffit de reporter le champ électrique dans l'équation de propagation pour en déduire la relation de dispersion.



On a alors :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

On obtient la relation de dispersion d'une OPPM dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Cours : Expression du champ magnétique en fonction du champ électrique

Le champ électrique est de la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$.

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} ; \vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \vec{\text{div}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Remarque : On peut utiliser une autre convention dans les autres exercices.

Le champ électrique complexe peut se mettre sous une autre forme :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(-i(\omega t - kx)) \vec{u}_y.$$

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs mais avec des signes différents :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}} ; \vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \vec{\text{div}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$



Les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ ne sont utilisables que pour une OPPM avec les coordonnées cartésiennes.

Si on ne peut pas utiliser les opérateurs simplifiés précédents, il faut écrire l'équation de Maxwell-Faraday et en déduire par le calcul du rotationnel le champ magnétique.



On a une OPPM. Le champ magnétique se déduit directement de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -(i\omega \underline{\vec{B}})$$

Finalement, on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

On a vu que $\omega = kc$. On a également :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y ; \vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

On vérifie que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est bien direct.



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes.



Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On a vu que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. On a donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting sur une période est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x$$

car la moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t - kx)$ vaut $\frac{1}{2}$.

On considère une surface S orthogonale à la direction de propagation. On choisit $\vec{S} = S \vec{u}_x$.

La puissance moyenne qui traverse la surface S est le flux du vecteur de Poynting :

$$P_{\text{moy}} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S$$

3. La fréquence de l'onde est $f = 100$ MHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande FM (modulation de fréquence). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est du même ordre de grandeur que a . On ne peut pas supposer que la champ magnétique est uniforme dans le cadre.

On oriente le cadre suivant suivant \vec{u}_z .

Le flux du champ magnétique en notation complexe à travers une spire :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On a alors :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) dx dy$$

Il faut intégrer x entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et y entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Comme les variables sont indépendantes, on a le produit de deux intégrales :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} dy \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \left[\frac{\exp(-ikx)}{-ik} \right]_{-a/2}^{a/2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(i\omega t) \left(\exp\left(-ik\frac{a}{2}\right) - \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) \right)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(2i\omega t) \left(2i \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right) = \frac{2E_0 a}{kc} \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Il reste à prendre la partie réelle pour obtenir le flux réel :

$$\varphi = \frac{2E_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

4. La fréquence de l'onde électromagnétique est $f = 160$ kHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande AM (modulation d'amplitude). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{160 \times 10^3} = 1875 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre. Sur une distance de 1 m, le champ magnétique est quasi uniforme et quasiment la même valeur qu'en $x = 0$. On peut alors calculer le flux plus simplement que dans la question précédente.

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = N \left(\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \right) (a^2)$$

On peut effectuer un développement limité de la relation trouvée dans la question précédente puisque

$$\frac{ka}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} a = \frac{\pi a}{\lambda} \ll 1$$

On retrouve bien le même résultat :

$$\Phi = \frac{2NE_0a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t) \approx \frac{2NE_0a}{kc} \frac{ka}{2} \cos(\omega t) = N \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) a^2$$

Remarque : Il est important de bien raisonner sur la longueur d'onde. Si la longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre, on peut supposer que le champ est magnétique est quasi uniforme au niveau du cadre et le calcul du flux du champ magnétique est beaucoup plus simple.

Exercice 6.2 : Propagation guidée et relation de dispersion (PC-PSI)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide suivant \vec{u}_z entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans le vide.

1. Établir l'équation de propagation.

2. On cherche le champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$. Établir la relation de dispersion. Montrer que l'on doit avoir une fréquence supérieure à une fréquence minimale f_{\min} pour avoir propagation de cette onde. Déterminer f_{\min} en fonction de c et d . Quelle est la nature de l'onde ?

Analyse du problème

La méthode systématique pour établir l'équation de propagation est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique. On en déduit une équation différentielle sur $E(x)$. On a des conditions aux limites qui imposent des contraintes sur le champ électrique et qui permettent d'en déduire la relation de dispersion.

Cours : Conducteur parfait

On appelle conducteur parfait un conducteur ohmique dont la conductivité est infinie :

- Le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans le conducteur.

- Il n'y a pas de charges et de courants volumiques dans le conducteur. Par contre, on peut avoir des charges et des courants en surface.
- On utilisera les relations de passage pour le champ électrique et pour le champ magnétique.



1. On calcule le rotationnel du rotationnel en utilisant les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

puisque dans le vide $\text{div} \vec{E} = 0$.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

2. On cherche le champ électrique en notation complexe de la forme :

$$\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y.$$

On remplace le champ électrique dans l'équation de propagation et on calcule les différents termes.



Attention au calcul du Laplacien en coordonnées cartésiennes.

Le Laplacien scalaire est :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U$$

Le Laplacien vectoriel est :

$$\Delta \vec{a} = \begin{cases} \Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Cette formule sera souvent utilisée pour la propagation des ondes.

On ne peut pas généraliser cette formule en coordonnées cylindriques et sphériques.



Le Laplacien vectoriel du champ électrique est :

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E}_y &= \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} \\ &= \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz))\end{aligned}$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

On remplace dans l'équation de propagation :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E(x) \exp(i(\omega t - kz))\end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur $E(x)$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$$

Conditions aux limites

On applique les relations de passage au niveau des conducteurs pour $x = 0$ et $x = d$. On doit avoir continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

Première condition pour $x = 0$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = 0$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(0) = 0$$

Deuxième condition pour $x = d$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = d$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(d) = 0$$

Plusieurs cas pour la résolution de l'équation différentielle

Premier cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$

On pose $\Omega^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \Omega^2 = 0$$



Attention à l'écriture de l'équation caractéristique. Il ne faut pas écrire $r^2 - \Omega^2 r = 0$!



On a deux racines réelles : $r_1 = \Omega$ et $r_2 = -\Omega$.
On a des solutions de la forme :

$$E(x) = A \operatorname{ch} \Omega x + B \operatorname{sh} \Omega x$$



Ne pas utiliser cette forme si la distance entre les deux plaques est considérée comme infinie. On utilisera des solutions de la forme :

$$E(x) = A' \exp(\Omega x) + B' \exp(-\Omega x)$$



On doit avoir $E(0) = 0 = A$ et $E(d) = B \operatorname{sh}(\Omega d) = 0$, soit $A = B = 0$.
Le champ est toujours nul. On n'a pas de propagation d'onde.

Deuxième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

La seule solution est d'avoir un champ nul.

Troisième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$

On pose $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

$E(x)$ se met alors sous la forme :

$$E(x) = A \cos \Omega x + B \sin \Omega x$$

On a deux conditions aux limites :

- $E(0) = 0$, donc $A = 0$.
- $E(d) = 0$. On doit donc avoir $\Omega d = n\pi$ avec n entier positif.

On a une condition de quantification :

$$\Omega = n \frac{\pi}{d}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Pour avoir $k^2 > 0$, il faut que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Soit : $\frac{4\pi^2 f^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$. La condition est donc :

$$f > n \frac{c}{2d}$$

avec n entier positif.

Le champ électrique est donc :

$$\vec{E} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le champ électrique est une **onde progressive monochromatique polarisée** suivant \vec{u}_y .

L'onde se propage dans la direction \vec{u}_z . Si on considère un plan $z = cte$, le champ électrique n'est pas uniforme car il dépend de x .

Le champ électrique n'est donc pas une onde plane.

La fréquence minimale pour avoir propagation de l'onde est :

$$f_{\min} = \frac{c}{2d}$$

Exercice 6.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting (PC-PSI)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans le vide. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$.

1. Calculer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
2. Représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation. Interprétation physique.

Analyse du problème

Pour calculer le champ magnétique, on ne peut pas utiliser les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ car on n'a pas une OPPM avec les coordonnées cartésiennes. Il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

La relation de dispersion s'obtient en reportant le champ électrique dans l'équation de propagation.



1. On remarque que le champ électrique est nul pour $x = 0$ et $x = d$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $x = 0$ et $x = d$ puisqu'on a un conducteur parfait.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit en notation complexe :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Calcul de B_x :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = -ikE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Calcul de B_z :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_0 \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{E_0 \pi}{i\omega d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz)) \\ &= \frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp\left(i\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_z = -\frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t - kz)$$



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes. Par contre, le calcul du champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday peut se faire en notation complexe ou en notation réelle car les équations de Maxwell sont linéaires.



$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ -\frac{\pi}{d\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \end{vmatrix}$$

puisque $\langle \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$.

La seule composante non nulle du vecteur de Poynting correspond à la direction de propagation de l'onde.

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde.

La puissance moyenne transportée par cette onde est :

$$P_{moy} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \frac{kS}{2\mu_0\omega} E_0^2$$

2. La vitesse de phase est : $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Il faut déterminer la relation de dispersion pour exprimer la vitesse de phase en fonction de ω . Pour cela on reporte le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ dans l'équation de propagation.

Dans le vide, l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On projette sur \vec{u}_y :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{d^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \end{aligned}$$

On a donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$$

Il faut avoir $k^2 > 0$. La pulsation ω doit être supérieure ω_{\min} définie par :

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{d}$$

La vitesse de phase peut se mettre sous la forme :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^2}}$$

La vitesse de groupe est :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)$$

Remarque : On peut calculer plus simplement la vitesse de groupe avec la différentielle de la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$.



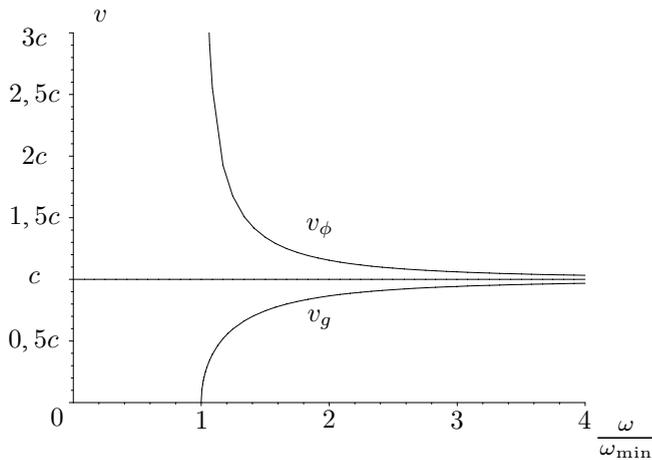
On obtient :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

On en déduit que :

$$v_g v_\phi = c^2$$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_{\min}}$.



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 6.4 : Réflexion sur un conducteur parfait (PC-PSI)

Une onde plane monochromatique se propage dans le vide. Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

1. L'onde rencontre en $z = 0$ un plan métallique parfait et l'espace $z > 0$ est occupé par un métal parfait. Montrer qu'il y a une onde réfléchie. On note $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ le champ réfléchi. Établir l'expression de \underline{E}_{r0} .
2. Déterminer le champ magnétique dans la région $z < 0$. De quel type d'ondes s'agit-il ?
3. On place en $z = -\ell$ un second plan métallique identique au premier. En introduisant un entier N préciser les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir entre les deux plans. Qu'impliquent les relations de passage en $z = 0$ et $z = -\ell$ concernant le champ magnétique ?
4. Quelle est la densité moyenne d'énergie volumique ? Quelle est l'expression de l'énergie électromagnétique moyenne localisée dans un cylindre de section S de longueur ℓ de génératrices parallèles à Oz ?

Analyse du problème

Il s'agit d'un exercice avec la réflexion d'une onde sur un conducteur parfait. On écrit la relation de passage du champ électrique pour montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchie et en déduire ses caractéristiques. On obtient des ondes stationnaires.



1. On remarque que le champ électrique est nul pour $z = 0$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$. On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) = 0$$

Cette condition n'est pas réalisée si $E_0 \neq 0$. On a donc nécessairement une onde réfléchie. Elle se met sous la forme la plus générale : $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$.

La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$. On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) + \underline{E}_{r0} \exp(i\omega' t) = 0$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout instant t , on a nécessairement $\omega = \omega'$ et comme la relation de dispersion est $\omega = kc$, alors $k' = k$. L'amplitude de l'onde réfléchie doit vérifier la relation :

$$\underline{E}_{r0} = -E_0$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie est :

$$\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$$

2. Onde incidente :

On a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage dans le vide. Le champ magnétique est donné par la relation :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchie :

On peut utiliser le même formalisme pour l'onde réfléchie.

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge (-E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x)}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$$

Calcul du champ électrique résultant :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_0 \exp(i(\omega t - kz)) - E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) - \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{E} = -2i E_0 \exp(i\omega t) \sin(kz) = 2E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$$

Calcul du champ magnétique résultant :

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) + \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{B} = \frac{2E_0}{c} \exp(i\omega t) \cos(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$$

On obtient une **onde stationnaire**. Elle ne se propage pas car elle est de la forme $f(z)g(t)$.

3. On doit avoir en $z = -\ell$ un champ électrique nul pour vérifier les conditions de passage pour le champ électrique :

$$\vec{E}(-\ell) = \vec{0} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(-k\ell) \vec{u}_x$$

soit $k\ell = N\pi$ avec N entier.

k est le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde. On a :

$$k\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell = N\pi$$

D'où :

$$\lambda = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence est notée f ou ν . Elle est reliée à la longueur d'onde λ par la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence de l'onde doit vérifier la relation :

$$\nu = N \frac{c}{2\ell}$$

avec N entier positif.

Relation de passage pour $z = 0$:

On appelle côté 1 la région $z = 0^+$ et côté 2 la région $z = 0^-$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = 0$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z)$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (-\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Relation de passage pour $z = -\ell$:

$z = -\ell$: On appelle côté 1 la région $z = -\ell^-$ et côté 2 la région $z = -\ell^+$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = -\ell$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1).$$

D'où :

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{u}_z \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y = \frac{-2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{-2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

Interprétation physique

On obtient des courants surfaciques pour $z = 0$ et $z = -\ell$.

L'onde incidente qui arrive sur le métal met en mouvement les électrons qui sont à l'origine d'un champ réfléchi de même pulsation puisque les équations de Maxwell sont linéaires.

Comme le conducteur est parfait, les courants sont surfaciques.

4. Attention : il faut utiliser les notations réelles car on a le produit de grandeurs sinusoïdales. La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)}{2} + \frac{4E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)}{2\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

soit :

$$u_{em} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

La moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\langle u_{em} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \cos^2(kz)$$

Finalement, on obtient :

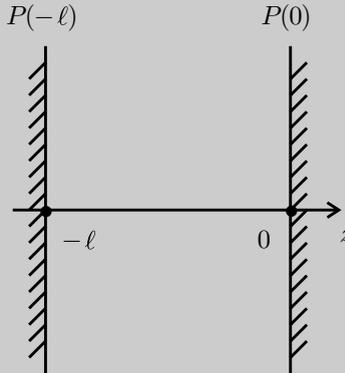
$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

L'énergie électromagnétique moyenne localisée dans le cylindre de section S et de longueur ℓ est :

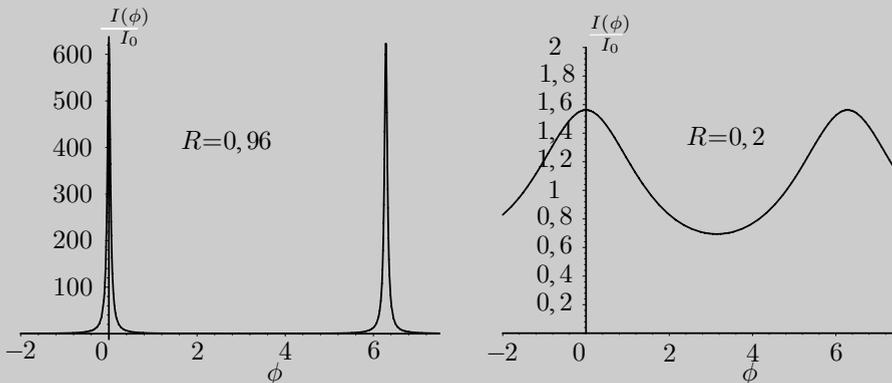
$$\langle U_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 S \ell$$

Exercice 6.5 : Cavité résonante (PC-PSI)*

On considère deux plans disposés en $z = 0$ et $z = -\ell$. Un champ électromagnétique peut se propager entre ces deux plans. On appelle r le coefficient de réflexion pour le champ électrique avec $-1 < r < 0$. Un dispositif non représenté crée en $z = -\ell$ à $t = 0$ une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note \vec{E}_1 le champ électrique se propageant dans le sens positif, après avoir subi une réflexion sur $P(0)$ puis une sur $P(-\ell)$. On pose $\phi = 2k\ell$, $R = r^2$ et $I_0 = E_0^2$.



1. Écrire l'expression de \vec{E}_1 à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$.
2. Écrire de même l'expression des champs $\vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$ se propageant dans le sens positif après avoir subi respectivement : 2 réflexions en $P(0)$, 2 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_2 , 3 réflexions en $P(0)$, 3 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_3 , n réflexions en $P(0)$ et n réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_n .
3. On pose $\vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_n$. Exprimer à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$ l'amplitude \underline{A} de \vec{E} . On pose $I = \underline{A} \cdot \underline{A}^*$ et $I_0 = E_0^2$. Exprimer l'intensité I à l'aide de I_0 , R et ϕ . On représente les courbes $\frac{I(\phi)}{I_0}$ pour $R = 0,2$ et pour $R = 0,96$. Calculer le contraste pour les deux courbes ?



4. Déterminer pour $R = 0,96$ les fréquences pouvant se propager avec une intensité non négligeable. Quel est l'intérêt du dispositif ?

Application numérique : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $\ell = 0,30 \text{ m}$; $R = 0,96$.

Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence du coefficient de réflexion sur le champ résultant dans une cavité et montrer que l'on peut avoir des champs électriques avec des amplitudes importantes et retrouver des ondes stationnaires étudiées dans l'exercice précédent.

On a une OPPM qui se propage dans le vide. On a établi dans l'exercice précédent l'équation de propagation et la relation de dispersion : $\omega = kc$.



1. On considère une onde incidente de la forme : $E_0 \exp(i(\omega t - kz))$. Elle arrive en $z = 0$ à l'instant $t = t_1 = \frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_1$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$r E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + kz\right)\right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > \frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $+kz$ car l'onde se propage suivant $-\vec{u}_z$.



En développant, on a :

$$r E_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{\omega \ell}{c}\right)\right)$$

D'après l'énoncé, on a :

$$\frac{\omega \ell}{c} = \frac{kc}{c} \ell = k\ell = \frac{\phi}{2}$$

L'onde réfléchie peut se mettre sous la forme :

$$r E_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{\phi}{2}\right)\right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_2 = 2\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_2$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$r^2 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{2k\ell}{c}\right) - kz\right)\right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > 2\frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $2\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $-kz$ car l'onde se propage suivant $+\vec{u}_z$.



L'onde peut s'écrire :

$$r^2 E_0 \exp(i(\omega t - kz - \phi))$$

D'après l'énoncé, on pose $R = r^2$.

Le champ électrique \vec{E}_1 peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_1 = R E_0 \exp(i(\omega t - kz - \phi)) \vec{u}_x$$

2. Cette onde arrive en $z = 0$ pour $t = t_3 = 3\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_3$:

On a une troisième réflexion en $z = 0$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^3 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{3k\ell}{c}\right) + kz\right)\right)$$

On a donc :

$$r^3 E_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{3\phi}{2}\right)\right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_4 = 4\frac{\ell}{c}$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

Pour $t > t_4$:

On a une quatrième réflexion en $z = -\ell$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^4 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{4k\ell}{c}\right) - kz\right)\right)$$

On a donc :

$$r^4 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi))$$

Le champ électrique \vec{E}_2 peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_2 = R^2 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi)) \vec{u}_x$$

On peut généraliser facilement et en déduire le champ électrique \vec{E}_n qui peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_n = R^n E_0 \exp(i(\omega t - kz - n\phi)) \vec{u}_x$$

3. Le champ résultant est :

$$\underline{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) [1 + R \exp(-i\phi) + R^2 \exp(-i2\phi) + \dots + R^n \exp(-in\phi) + \dots]$$

On peut mettre le champ électrique sous la forme $\underline{E} = \underline{A} \exp(i(\omega t - kz))$ avec \underline{A} qui correspond à la suite géométrique.

L'amplitude du champ résultant est :

$$\underline{A} = \frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)}$$

puisque $R < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n \rightarrow 0$.

L'intensité est :

$$\begin{aligned} I &= \underline{A} \underline{A}^* = \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)} \right) \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(i\phi)} \right) \\ &= \frac{E_0^2}{1 - R e^{i\phi} - R e^{-i\phi} + R^2} \end{aligned}$$

On obtient :

$$I = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

en posant : $I_0 = E_0^2$.

Le contraste est défini par :



$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$



I_{\max} est obtenu pour $\phi = 0$, soit $I_{\max} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R}$

I_{\min} est obtenu pour $\phi = \pi$, soit $I_{\min} = \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R}$

Calcul de $I_{\max} + I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} + I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} + \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R + 1 + R^2 - 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} + I_{\min} = \frac{2I_0 (1 + R^2)}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Calcul de $I_{\max} - I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} - I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} - \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R - 1 - R^2 + 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{4RI_0}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Le contraste vaut :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

Pour $R = 0,96$: $C = 0,999$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 625$.

Pour $R = 0,2$: $C = 0,38$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 1,56$.

On a un contraste bien meilleur pour $R = 0,96$. On a une résonance très précise.

4. On cherche les fréquences qui peuvent se propager.

Pour avoir une intensité qui ne soit pas négligeable, il faut avoir

$$\phi = 2\pi N = 2k\ell = 2\frac{2\pi}{\lambda}\ell = \frac{4\pi}{cT}\ell = \frac{4\pi\ell}{c}\nu$$

La condition sur la fréquence est :

$$\nu = \frac{c}{2\ell}N$$

Application numérique pour $N = 1$: $\nu = 500$ MHz.

Les fréquences multiples de 500 MHz donnent donc très rapidement des ondes stationnaires d'amplitude non négligeable (voir exercice précédent où on cherche directement la solution sous la forme d'ondes stationnaires).

On a donc une cavité résonante avec amplification du signal d'entrée.

Interprétation qualitative :

- Soit $2\ell = ct'$ avec t' le temps mis à parcourir la zone d'interaction. Si le signal a une période égale à $\frac{2\ell}{c}$, l'onde qui subit deux réflexions est en phase avec l'onde incidente. Le champ résultant sera donc plus grand que le champ de l'onde incidente. Comme le coefficient de réflexion est proche de 1, peu d'énergie est perdue à chaque réflexion. Il faut donc un très grand nombre de réflexions avant d'avoir une amplitude négligeable. On

a vu que l'intensité est 625 fois plus importante que l'intensité de l'onde incidente.

- Si la période du signal est N fois plus petite que $\frac{2\ell}{c}$, ou une fréquence N fois plus grande que $\frac{c}{2\ell}$, on a encore une amplification du signal.
- Par contre, si la fréquence de l'onde incidente est différente de $N\frac{c}{2\ell}$, l'intensité résultante est quasi nulle. On a une amplification très sélective.

Remarque : On peut calculer la largeur à mi-hauteur définie par $I\left(\phi \pm \frac{\Delta\phi}{2}\right) \geq \frac{I_{\max}}{2}$. On peut en déduire la largeur $\Delta\nu$ en fréquence avec la relation $\Delta\nu = \frac{\Delta\phi c}{4\pi\ell}$. Pour avoir une résonance très précise, il faut donc allonger la cavité.



Pour réaliser un laser, on utilise une cavité résonante constituée de deux miroirs.

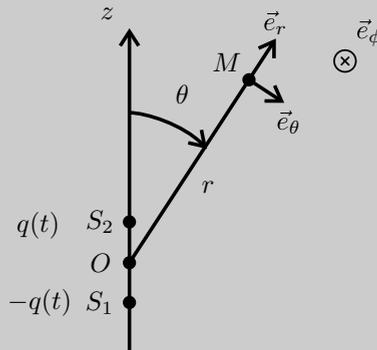
Exercice 6.6 : Rayonnement dipolaire (PC)

On étudie le rayonnement électromagnétique émis par un dipôle électrique constitué des charges $-q(t)$ et $q(t)$, placées dans le vide. On associe à la charge $q(t) = q_0 \cos \omega t$ la notation complexe $\underline{q}(t) = q_0 \exp(j\omega t)$. On modélise les charges du dipôle par deux petites sphères de capacités négligeables, reliées par un fil conducteur de résistance nulle. Les variations de q engendrent un courant variable $i(t)$ entre S_1 et S_2 . On pose $a = S_1 S_2$. Le champ électromagnétique

rayonné par le dipôle oscillant à grande distance est : $\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta}{r}$;

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\phi}{r}$$

On rappelle que $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$.



1. Donner l'expression de l'amplitude p_0 du moment dipolaire électrique $p(t)\vec{e}_z$. Exprimer l'amplitude complexe \underline{i}_0 de l'intensité $\underline{i}(t)$, du courant parcourant le fil conducteur $S_1 S_2$, en fonction de a , ω et p_0 .

2. On appelle λ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique émise. On suppose que $r \gg \lambda \gg a$. Quelle est la nature de l'approximation ? Quelle relation existe-t-il entre \vec{E} et \vec{B} ?

3. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Calculer la puissance moyenne P_m , rayonnée par ce dipôle, à travers une sphère de centre O et de rayon r . On désigne par \Re la résistance de rayonnement telle que : $P_m = \frac{1}{2} \Re i_0^2$. Montrer que $\Re = k \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ où k est une constante que l'on exprimera en fonction de μ_0 et c .

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde émise par un dipôle rayonnant. Pour calculer le vecteur de Poynting, il faut revenir aux notations réelles.



1. Le moment dipolaire est : $\vec{p} = q \overrightarrow{S_1 S_2} = q_0 a \cos(\omega t) \vec{e}_z$
L'amplitude du moment dipolaire est donc :

$$p_0 = q_0 a$$

L'intensité du courant électrique qui parcourt le fil orienté de S_1 vers S_2

$$\text{est : } i = \frac{dq}{dt}.$$

En notation complexe, on a : $\underline{i} = \frac{dq}{dt} = j\omega \underline{q} = j\omega q_0 \exp(j\omega t)$.

L'amplitude complexe de \underline{i} est donc :

$$\underline{i}_0 = j\omega q_0 = j\omega \frac{p_0}{a}$$

2. $r \gg a$: approximation dipolaire. On étudie le champ créé par ce dipôle à grande distance devant ses dimensions.

$\lambda \gg a$: mouvement non relativiste des charges. En effet, la longueur d'onde est reliée à la période de l'onde par : $\lambda = cT$. On a donc $c \gg \frac{a}{T}$. On

appelle v une vitesse caractéristique des charges. $c \gg v$ traduit donc un mouvement non relativiste des charges.

La relation entre \vec{E} et \vec{B} est :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

puisque la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ est orthonormée directe.

Remarque : on retrouve localement la structure d'une onde plane progressive monochromatique.



3. Le champ électrique de l'onde émise est :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \sin \theta \vec{e}_\theta}{4\pi r} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Le champ magnétique de l'onde émise est :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0^2 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 \mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin^2 \theta \vec{e}_r$$



Il faut passer en notations réelles pour calculer le vecteur de Poynting !



La moyenne temporelle de la fonction $\cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)$ sur une période vaut

$$\frac{1}{2}. \text{ On a donc : } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 \mu_0 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$, on a alors : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0^2 \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 \mu_0 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$. D'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2r^2 \lambda^4} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

La puissance moyenne P_m , rayonnée par ce dipôle, à travers une sphère de centre O et de rayon r est :

$$P_m = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2r^2 \lambda^4} \sin^2 \theta \vec{e}_r \cdot (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) \vec{e}_r$$

Pour décrire la sphère, on intègre θ entre 0 et π , ϕ entre 0 et 2π .

$$P_m = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2\lambda^4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \right) \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2\lambda^4} \frac{4}{3} 2\pi$$

On a vu que $i_0 = j\omega q_0 = j\omega \frac{p_0}{a}$, soit en module : $i_0 = \omega \frac{p_0}{a} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{p_0}{a}$.

$$\text{On a alors : } P_m = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 \left(\frac{i_0 a \lambda}{2\pi c}\right)^2}{2\lambda^4} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu_0 \pi c}{3} \frac{a^2}{\lambda^2}\right) i_0^2$$

Le coefficient k vaut : $\frac{2\mu_0 \pi c}{3}$.

7

Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

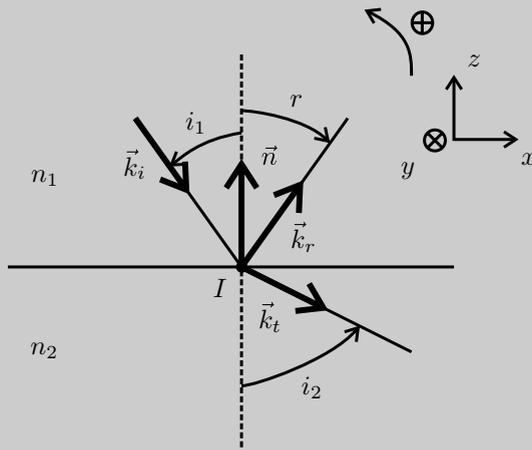
Exercice 7.1 : Lois de Descartes (PC-PSI)

On considère deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. Dans la région $z > 0$, l'indice du milieu est n_1 . Dans la région $z < 0$, l'indice du milieu est n_2 . On considère une onde incidente plane progressive monochromatique se propageant dans le milieu d'indice n_1 . Au point d'incidence I , une partie de l'onde est réfléchi et l'autre partie est transmise. Les ondes réfléchies et transmises sont planes, progressives, monochromatiques. Les champs électriques incident, réfléchi et transmis se mettent sous la forme :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM}\right)\right) \vec{u}_y, \quad \vec{E}_r = E_{0r} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM}\right)\right) \vec{u}_y$$

et $\vec{E}_t = E_{0t} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM}\right)\right) \vec{u}_y$.

1. Établir l'équation de propagation et la relation de dispersion dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope d'indice n . Le diélectrique est supposé parfait.
2. Écrire les relations de passage du champ électrique à la traversée du dioptre et en déduire les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction.



Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un diélectrique parfait LHI (linéaire homogène et isotrope). Les relations de passage permettent de démontrer les lois de Descartes.

Cours : Définitions

On appelle **dioptré** la surface de séparation de deux milieux transparents différents. Cette surface pour être parfaite du point optique ne doit présenter que des aspérités dont les dimensions sont très inférieures à la longueur d'onde.

L'onde incidente arrive au point I appelé **point d'incidence**.

Le **plan d'incidence** est défini par la direction du rayon incident (vecteur d'onde \vec{k}_i) et la normale au dioptré (vecteur \vec{n} sur le schéma) au point d'incidence.

Lois de Descartes de la réflexion

- 1^{re} loi de Descartes de la réflexion : le rayon incident et le rayon réfléchi sont contenus dans le plan d'incidence.
- 2^e loi de Descartes de la réflexion : le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface réfléchissante. L'angle de réflexion r est l'opposé de l'angle d'incidence i_1 : $r = -i_1$.

Lois de Descartes de la réfraction

- 1^{re} loi de Descartes de la réfraction : le rayon incident et le rayon réfracté sont contenus dans le plan d'incidence.
- 2^e loi de Descartes de la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Diélectrique parfait LHI et équations de Maxwell

Un diélectrique est linéaire homogène et isotrope si le vecteur polarisation peut se mettre sous la forme :

$$\vec{P}(M,t) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

\vec{P} est le vecteur polarisation, ε_0 est la permittivité du vide et χ_e la susceptibilité du milieu. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \vec{j}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

On définit la permittivité du milieu $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.

ε_r est la permittivité relative du milieu.

On peut montrer que les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Il suffit en fait de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$ dans les équations de Maxwell dans la vide pour obtenir les équations de Maxwell dans un diélectrique LHI.

On étudie par la suite le cas d'un **diélectrique parfait** où $\rho = 0$ (pas de charges libres) et $\vec{j} = \vec{0}$ (pas de courants libres).

On a alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$



1. On calcule le rotationnel du rotationnel du champ électrique pour obtenir l'équation de propagation :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

On en déduit :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Pour un diélectrique parfait LHI, l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On pose

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

On étudie une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de la forme :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}\right)\right) \vec{u}_y.$$

On remplace le champ électrique dans l'équation de propagation. On obtient :

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} (-i\omega)^2 \vec{E} = \frac{-\omega^2}{v^2} \vec{E}$$

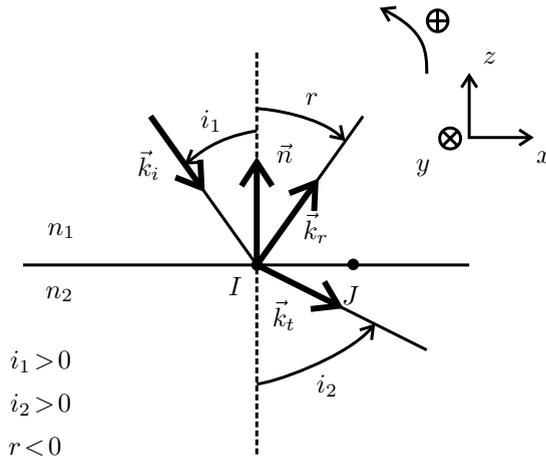
La relation de dispersion est donc :

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

2. Milieu 1 :

La relation de dispersion est :

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$$



Le champ électrique dans le milieu 1 est :

$$\vec{E}_1 = E_{0i} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}\right)\right) \vec{u}_y + E_{0r} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM}\right)\right) \vec{u}_y$$



On applique le théorème de superposition pour calculer le champ électrique dans une région.



Milieu 2 :

La relation de dispersion est :

$$k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

Le champ électrique dans le milieu 2 est :

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t = E_{0t} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM}\right)\right) \vec{u}_y$$

Relation de passage au point I :

On a continuité de la composante tangentielle du champ électrique. Soit :

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Le point I a pour coordonnées : $I \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$

Les vecteurs d'onde peuvent s'écrire : $\vec{k}_i = \begin{vmatrix} k_{ix} \\ 0 \\ k_{iz} \end{vmatrix}$; $\vec{k}_r = \begin{vmatrix} k_{rx} \\ 0 \\ k_{rz} \end{vmatrix}$; $\vec{k}_t = \begin{vmatrix} k_{tx} \\ 0 \\ k_{tz} \end{vmatrix}$

On a donc :

$$\begin{aligned} E_{0i} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OI}\right)\right) + E_{0r} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OI}\right)\right) \\ = E_{0t} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OI}\right)\right) \end{aligned}$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout t . On multiplie par :
 $\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OI}\right)\right)$.

On obtient :

$$E_{0i} + E_{0r} \exp\left(i\left(\left(\vec{k}_i - \vec{k}_r\right) \cdot \vec{OI}\right)\right) = E_{0r} \exp\left(i\left(\left(\vec{k}_i - \vec{k}_t\right) \cdot \vec{OI}\right)\right)$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout point I du dioptre, soit :

$$\begin{cases} \left(\vec{k}_i - \vec{k}_r\right) \cdot \vec{OI} = \text{constante1} \\ \left(\vec{k}_i - \vec{k}_t\right) \cdot \vec{OI} = \text{constante2} \end{cases}$$

On réécrit ces deux équations pour un autre point J du dioptre et on fait la différence. On a alors :

$$\begin{cases} \left(\vec{k}_i - \vec{k}_r\right) \cdot \vec{IJ} = 0 \\ \left(\vec{k}_i - \vec{k}_t\right) \cdot \vec{IJ} = 0 \end{cases}$$

Ces deux relations doivent être vérifiées pour tout point I et J du dioptre.

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \vec{k}_i - \vec{k}_r = \alpha \vec{n} \\ \vec{k}_i - \vec{k}_t = \beta \vec{n} \end{cases}$$

avec α et β des constantes.

On en déduit que :

$$\begin{cases} \vec{k}_r = \vec{k}_i - \alpha \vec{n} \\ \vec{k}_t = \vec{k}_i - \beta \vec{n} \end{cases}$$

On a démontré la première loi de Descartes : le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.

On multiplie les deux équations par le vecteur \vec{IJ} .

On a alors :

$$\begin{cases} \left(\vec{k}_i - \vec{k}_r\right) \cdot \vec{IJ} = 0 = (k_{ix} - k_{rx}) IJ \\ \left(\vec{k}_i - \vec{k}_t\right) \cdot \vec{IJ} = 0 = (k_{ix} - k_{tx}) IJ \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} k_{ix} = k_{rx} \\ k_{ix} = k_{tx} \end{cases}$$

On en déduit comme $r < 0$:

$$\begin{cases} k_1 \sin i_1 = -k_1 \sin r \\ k_1 \sin i_1 = k_2 \sin i_2 \end{cases}$$

On a vu que $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ et $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$.

On en déduit la deuxième loi de Descartes :

$$\begin{cases} r = -i_1 \\ n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \end{cases}$$

Exercice 7.2 : Coefficients de réflexion et de transmission avec une incidence normale (PC-PSI)

On considère deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. Dans la région $z < 0$, l'indice du milieu est n_1 . Dans la région $z > 0$, l'indice du milieu est n_2 . On considère une onde sous incidence normale se propageant dans le milieu d'indice n_1 . Au point d'incidence I , une partie de l'onde est réfléchi et l'autre partie est transmise. Les champs électriques incident, réfléchi et transmis se mettent respectivement sous la forme : $\vec{E}_i = E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{u}_y$, $\vec{E}_r = r E_{0i} \exp(i(\omega t + k_1 z)) \vec{u}_y$ et $\vec{E}_t = t E_{0i} \exp(i(\omega t - k_2 z)) \vec{u}_y$.

1. Exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique en fonction de n_1 et n_2 .
2. Exprimer R et T les coefficients de réflexion et de transmission en énergie en fonction de n_1 et n_2 . Calculer $R + T$.

Analyse du problème

Il faut commencer par calculer les champs magnétiques. On peut utiliser les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ car on a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) avec les coordonnées cartésiennes. Dans cet exercice, on utilisera $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$.

On utilisera les relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission.

Cours : Calcul du champ magnétique

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} ; \text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E} \text{ et } \text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}.$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit avec les opérateurs :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(i\omega \vec{B})$$

On en déduit que :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

On a vu dans l'exercice précédent que $k = n \frac{\omega}{c}$.

Remarque : L'opérateur $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ est valable aussi pour l'onde réfléchi.



1. Champ magnétique incident :

Le champ électrique incident est : $\vec{E}_i = E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{u}_y$.

$$\text{On a donc } \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = n_1 \frac{\omega \vec{u}_z \wedge E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{u}_y}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_i = -\frac{n_1 E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z))}{c} \vec{u}_x$$

Champ magnétique réfléchi :

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = n_1 \frac{\omega (-\vec{u}_z) \wedge \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t + k_1 z))}{c \omega} \vec{u}_y$$

Soit :

$$\vec{B}_r = \frac{n_1 \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t + k_1 z))}{c} \vec{u}_x$$

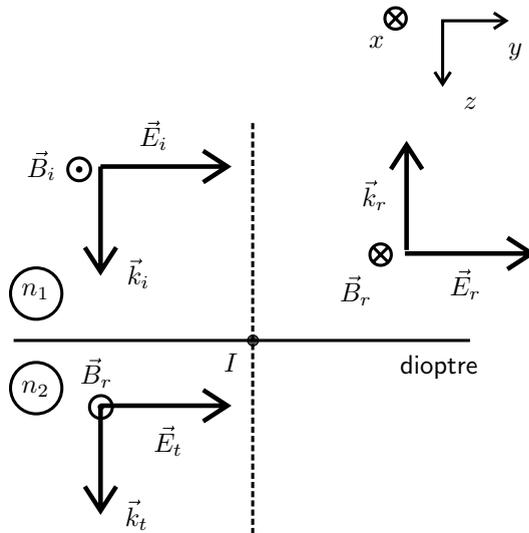
Champ magnétique transmis :

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = n_2 \frac{\omega \vec{u}_z \wedge \underline{t} E_{0i} \exp(i(\omega t - k_2 z))}{c \omega} \vec{u}_y$$

Soit :

$$\vec{B}_t = -\frac{n_2 \underline{t} E_{0i} \exp(i(\omega t - k_2 z))}{c} \vec{u}_x$$

On en déduit la figure suivante avec la représentation des champs électriques et magnétiques.



Milieu 1 :

Le champ électrique dans le milieu 1 est :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{u}_y + \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t + k_1 z)) \vec{u}_y$$

Le champ magnétique dans le milieu 1 est :

$$\vec{B}_1 = -\frac{n_1 E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z))}{c} \vec{u}_x + \frac{n_1 r E_{0i} \exp(i(\omega t + k_1 z))}{c} \vec{u}_x$$

Milieu 2 :

Le champ électrique dans le milieu 2 est :

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t = t E_{0i} \exp(i(\omega t - k_2 z)) \vec{u}_y$$

Le champ magnétique dans le milieu 2 est :

$$\vec{B}_2 = -\frac{n_2 t E_{0i} \exp(i(\omega t - k_2 z))}{c} \vec{u}_x$$

Relation de passage au point I :

L'onde incidente arrive sur le dioptre au point I caractérisé par $z = 0$. Il n'y a pas de charges et de courants en $z = 0$. Les relations de passage s'écrivent en $z = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ \vec{B}_1 = \vec{B}_2 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} E_{0i} \exp(i(\omega t)) + r E_{0i} \exp(i(\omega t)) = t E_{0i} \exp(i(\omega t)) \\ -\frac{n_1 E_{0i} \exp(i(\omega t))}{c} + \frac{n_1 r E_{0i} \exp(i(\omega t))}{c} = -\frac{n_2 t E_{0i} \exp(i(\omega t))}{c} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ n_1(1 - r) = n_2 t \end{cases}$$

En combinant la première et la deuxième équation, on a :

$$n_1(1 - r) = n_2(1 + r)$$

D'où :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

On en déduit que $t = 1 + r = 1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$.

D'où :

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Comme r et t sont réels, on les notera r et t dans la question 2.



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes.

2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ E_{0i} \cos(\omega t - k_1 z) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{n_1 E_{0i}}{c} \cos(\omega t - k_1 z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n_1 E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_1 z) \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{n_1 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

$$\text{puisque } \langle \cos^2(\omega t - k_1 z) \rangle = \frac{1}{2}.$$

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde incidente.

La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{moy,i} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{n_1 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \frac{n_1 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} S$$

Onde réfléchie :

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ r E_{0i} \cos(\omega t + k_1 z) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{n_1 r E_{0i}}{\mu_0 c} \cos(\omega t + k_1 z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_r = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{n_1 r^2 E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + k_1 z) \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{n_1 r^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde réfléchie.

La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{n_1 r^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z \cdot (-dS) \vec{u}_z = \frac{n_1 r^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} S$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ t E_{0i} \cos(\omega t - k_2 z) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{n_2 t E_{0i}}{c} \cos(\omega t - k_2 z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n_2 t^2 E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_2 z) \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{n_2 t^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde transmise.

La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{n_2 t^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \frac{n_2 t^2 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} S$$

Coefficients de réflexion et de transmission en énergie :

Le coefficient de réflexion en énergie est :

$$R = \frac{P_{moy,r}}{P_{moy,i}} = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Le coefficient de transmission en énergie est :

$$T = \frac{P_{moy,t}}{P_{moy,i}} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

On calcule $R + T$:

$$R + T = \frac{n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} + \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

On simplifie l'expression :

$$R + T = \frac{n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

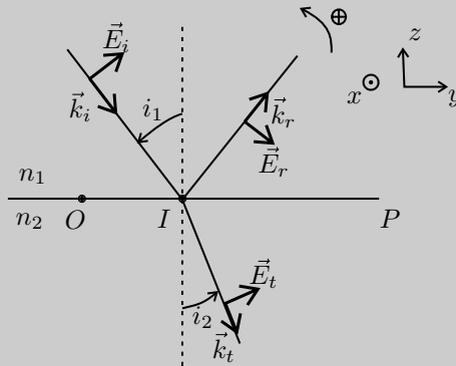
On obtient finalement :

$$R + T = 1$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie : toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie et l'onde transmise.

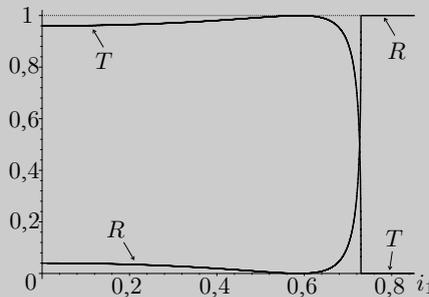
Exercice 7.3 : Incidence de Brewster (PC-PSI) *

Deux milieux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes, transparents, d'indices $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1$, sont séparés par une surface plane P coïncidant avec le plan (Oxy) . Une onde plane progressive harmonique de pulsation dont le champ électrique s'écrit $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}))$, tombe sur P avec l'angle d'incidence i_1 .



1. L'onde incidente est polarisée rectilignement et le champ électrique \vec{E}_i est contenu dans le plan d'incidence. Exprimer les rapports des amplitudes $r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$ et $t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$ du champ électrique en fonction de i_1, i_2, n_1 et n_2 .

2.



Déterminer R et T les coefficients de réflexion et de transmission en énergie. Interpréter le graphe représentant les coefficients de réflexion et de transmission en puissance en fonction de l'angle d'incidence.

3. L'onde qui arrive sur la surface P est une onde lumineuse naturelle. Pour quelle incidence i_{1B} la lumière réfléchi par P est-elle totalement polarisée ? Exprimer $\tan i_{1B}$ en fonction de n_1 et n_2 .

Analyse du problème

Cet exercice est le prolongement de l'exercice précédent avec une incidence quelconque. Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique, il faut utiliser les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique.



1. On cherche à calculer les champs magnétiques incident, réfléchi et transmis.

Champ magnétique incident :

Le champ électrique incident est : $\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_{0i} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}))$.

Le vecteur d'onde est :

$$\vec{k}_i = k_1 \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix}$$

avec $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$

On a donc

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega} = \frac{n_1}{c} E_{0i} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})) \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_1 \\ \sin i_1 \end{vmatrix}$$

Soit :

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{E_{0i} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}))}{c} n_1 \vec{u}_x$$

Champ magnétique réfléchi :

Le champ électrique réfléchi est : $\underline{\vec{E}}_r = \vec{E}_{0r} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))$.

Le vecteur d'onde est :

$$\vec{k}_r = k_1 \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ \cos i_1 \end{vmatrix}$$

avec $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$

On a donc

$$\underline{\vec{B}}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r}{\omega} = \frac{n_1}{c} E_{0r} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})) \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ \cos i_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_1 \\ -\sin i_1 \end{vmatrix}$$

Soit :

$$\vec{B}_r = -\frac{E_{0r} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))}{c} \vec{u}_x$$

Champ magnétique transmis :

Le champ électrique transmis est : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}))$.

Le vecteur d'onde est :

$$\vec{k}_t = k_2 \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_2 \\ -\cos i_2 \end{vmatrix}$$

avec $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$

On a donc

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{n_2}{c} E_{0t} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})) \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_2 \\ -\cos i_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_2 \\ \sin i_2 \end{vmatrix}$$

Soit :

$$\vec{B}_t = \frac{E_{0t} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}))}{c} n_2 \vec{u}_x$$

Relations de passage au point d'incidence :

La composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique se conservent. On n'a pas de charge et de courant surfacique.

On a 2 relations de continuité :

$$\begin{cases} E_{ti} + E_{tr} = E_{tt} \\ B_{ni} + B_{nr} = B_{nt} \end{cases}$$

On a donc en $z = 0$:

$$\begin{cases} E_{0i} \cos i_1 + E_{0r} \cos i_1 = E_{0t} \cos i_2 \\ \frac{E_{0i} n_1}{c} - \frac{n_1 E_{0r}}{c} = \frac{n_2 E_{0t}}{c} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \cos i_1 (1 + r) = t \cos i_2 & \text{(eq.1)} \\ n_1 (1 - r) = n_2 t & \text{(eq.2)} \end{cases}$$

On multiplie l'équation (1) par n_2 et l'équation (2) par $(-\cos i_2)$:

$$n_2 \cos i_1 + n_2 r \cos i_1 - n_1 \cos i_2 + n_1 r \cos i_2 = 0$$

On en déduit le coefficient de réflexion r :

$$r = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$$

On multiplie l'équation (1) par n_1 et l'équation (2) par $(\cos i_1)$:

$$n_1 \cos i_1 + n_1 \cos i_1 - n_1 \underline{t} \cos i_2 - n_2 \underline{t} \cos i_1 = 0$$

On en déduit le coefficient de transmission \underline{t} :

$$\underline{t} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$$

Comme \underline{r} et \underline{t} sont réels, on les notera r et t dans la question 2.

2. Pour calculer le vecteur de Poynting, il faut revenir aux notations réelles.

Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{n_1 E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_1 \\ \sin i_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{n_1 E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{n_1 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{puisque } \langle \cos^2(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2}.$$

On considère une surface $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ (dS est un élément de surface de la surface plane P). La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{\text{moy},i} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{n_1 E_{0i}^2}{2\mu_0 c} S \cos i_1$$

Onde réfléchie :

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{n_1 E_{0r}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_1 \\ -\sin i_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{n_1 E_{0r}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{n_1 E_{0r}^2}{2\mu_0 c} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{vmatrix}$$

On considère une surface $d\vec{S} = +dS \vec{u}_z$ (dS est un élément de surface de la surface plane P). La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{n_1 E_{0r}^2}{2\mu_0 c} S \cos i_1$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{n_2 E_{0t}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ \cos i_2 \\ \sin i_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{n_2 E_{0t}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_2 \\ -\cos i_2 \end{vmatrix}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{n_2 E_{0t}^2}{2\mu_0 c} \begin{vmatrix} 0 \\ \sin i_2 \\ -\cos i_2 \end{vmatrix}$$

On considère une surface $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ (dS est un élément de surface de la surface plane P). La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{n_2 E_{0t}^2}{2\mu_0 c} S \cos i_2$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \left(\frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \right)^2$$

et

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} = \left(\frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \right)^2 \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}$$

On vérifie que

$$R + T = 1$$

Cette relation traduit la conservation de la puissance : toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchiée et l'onde transmise.

Interprétation du graphe

On vérifie sur le graphe que l'on a toujours $R + T = 1$.

Pour $i > 0,84$ rad, on a $T = 0$. C'est prévisible puisqu'on a une réflexion

totale pour $i_{1l} = \arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 48,2^\circ = 0,84$ rad.

Pour $i > i_{1l}$, il n'y a pas de rayon transmis. Toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchiée.

On constate que pour $i_{1l} = 0,59$ rad, on a $R = 0$. C'est l'incidence de Brewster que l'on va étudier dans la question suivante.

3. On cherche à calculer l'angle i_{1B} pour lequel $R = 0$.

On a deux inconnues : i_1 et i_2 .

On dispose de deux équations : $R = 0$ et la deuxième loi de Descartes de la réfraction.

$$\begin{cases} n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1 = 0 \\ n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \end{cases}$$

On va résoudre le système par deux méthodes :

Première méthode astucieuse

On a : $(n_1 \cos i_2)(n_2 \sin i_2) = (n_2 \cos i_1)(n_1 \sin i_1)$,

soit $\sin(2i_2) = \sin(2i_1)$, donc $i_1 = i_2$ ou $2i_2 = \pi - 2i_1$.

La première solution est impossible. On a donc $i_2 = \frac{\pi}{2} - i_1$.

Or $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_2 \cos i_1$, d'où

$$\tan i_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$$

Deuxième méthode un peu plus longue

Il faut éliminer i_2 . On élève les deux équations au carré.

$$\begin{cases} n_1^2 (1 - \sin^2 i_2) = n_2^2 \cos^2 i_1 \\ n_1^2 \sin^2 i_1 = n_2^2 \sin^2 i_2 \end{cases}$$

On en déduit : $n_1^2 \left(1 - \frac{n_1^2 \sin^2 i_1}{n_2^2}\right) = n_2^2 (1 - \sin^2 i_1)$

On a donc : $n_1^2 n_2^2 - n_1^4 \sin^2 i_1 = n_2^4 - n_2^4 \sin^2 i_1$.

D'où :

$$\sin^2 i_1 = \frac{n_2^4 - n_1^2 n_2^2}{n_2^4 - n_1^4} = \frac{n_2^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(n_2^2 - n_1^2) (n_2^2 + n_1^2)} = \frac{n_2^2}{n_2^2 + n_1^2}$$

On a aussi :

$$\cos^2 i_1 = 1 - \sin^2 i_1 = \frac{n_1^2}{n_2^2 + n_1^2}$$

En faisant le rapport des deux équations, on obtient la tangente de l'angle de Brewster :

$$\tan i_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$$

Application numérique : $i_{1B} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 33,7^\circ = 0,588 \text{ rad}$

L'incidence de Brewster est l'incidence pour laquelle $R = 0$ pour un champ électrique incident contenu dans le plan d'incidence.

La lumière naturelle n'est pas polarisée. On peut décomposer le champ électrique incident en une composante dans le plan d'incidence et une composante orthogonale au plan d'incidence.

Pour l'angle d'incidence i_{1B} , la lumière réfléchie est polarisée rectilignement selon une direction orthogonale au plan d'incidence.

Exercice 7.4 : Couche antireflet (PC-PSI) *

Un milieu transparent, d'indice N est limité par une surface plane. Cette surface est recouverte par une couche mince transparente d'indice n et d'épaisseur uniforme e . Une onde plane progressive monochromatique (1) tombe sur la surface $x = 0$ sous incidence normale. Elle donne naissance à une onde réfléchie \vec{E}'_1 et une onde transmise \vec{E}_2 . L'onde \vec{E}_2 tombe sur la surface $x = e$. Elle donne naissance à une onde réfléchie \vec{E}'_2 et une onde transmise \vec{E}_3 .

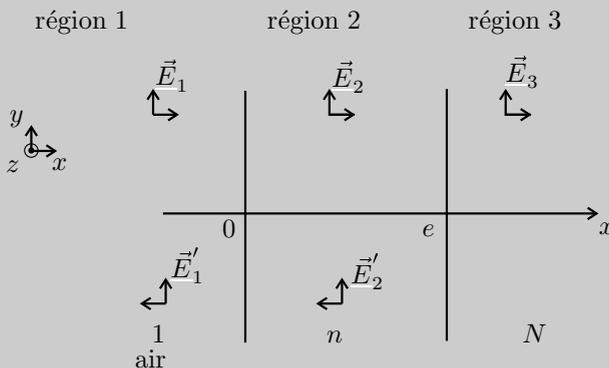
1. Écrire les conditions de passage du champ électrique et du champ magnétique.

Déterminer \underline{r} le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r} = \frac{E'_1}{E_1}$ dans le cas où

$$e = \frac{\lambda}{4n}.$$

2. Comment doit-on choisir n pour éliminer les pertes de lumière par réflexion ?

Application numérique : $N = 1,8$.



Analyse du problème

Il faut faire attention au calcul des champs électriques et magnétiques dans les différentes régions. Il faut écrire les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique en $x = 0$ et $x = e$ pour déterminer l'indice n .



1. On est dans le vide avec une onde plane progressive monochromatique (OPPM). On peut en déduire directement les différents champs électriques et magnétiques :

$$\vec{E}_1 = \underline{E}_1 \exp(j(\omega t - k_1 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_1}{c} = \frac{\underline{E}_1}{c} \exp(j(\omega t - k_1 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}'_1 = \underline{E}'_1 \exp(j(\omega t + k_1 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_1 = \frac{(-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}'_1}{c} = \frac{-\underline{E}'_1}{c} \exp(j(\omega t + k_1 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_2 = \underline{E}_2 \exp(j(\omega t - k_2 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_2}{v_2} = \frac{\underline{E}_2}{c} n \exp(j(\omega t - k_2 x)) \vec{u}_z \text{ car } v_2 = \frac{c}{n}$$

$$\vec{E}'_2 = \underline{E}'_2 \exp(j(\omega t + k_2 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_2 = \frac{(-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}'_2}{v_2} = \frac{-n \underline{E}'_2}{c} \exp(j(\omega t + k_2 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_3 = \underline{E}_3 \exp(j(\omega t - k_3 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_3}{v_3} = \frac{\underline{E}_3}{c} N \exp(j(\omega t - k_3 x)) \vec{u}_z \text{ car } v_3 = \frac{c}{N}$$



On n'a pas d'approximation surfacique dans l'exercice, simplement des interfaces entre des milieux différents. On a des diélectriques dans lesquels il n'y pas de courants et de charges surfaciques.

À la traversée de la surface de séparation entre deux milieux différents, on a donc continuité du champ électrique et du champ magnétique.



On écrit les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour $x = 0$:

$$\begin{cases} \underline{E}_1 + \underline{E}'_1 = \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 \\ \underline{E}_1 - \underline{E}'_1 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \end{cases}$$

On écrit les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour $x = e$:

$$\begin{cases} \underline{E}_2 \exp(-j\alpha) + \underline{E}'_2 \exp(j\alpha) = \underline{E}_3 \exp(-j\alpha) \\ n(\underline{E}_2 \exp(-j\alpha) - \underline{E}'_2 \exp(j\alpha)) = N \underline{E}_3 \exp(-j\alpha) \end{cases}$$

avec $\alpha = k_2 e = n \frac{2\pi}{\lambda} e$.

Or d'après l'énoncé, $e = \frac{\lambda}{4n}$. On a donc :

$$\alpha = n \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{n} \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \underline{E}_1 + \underline{E}'_1 = \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 \\ \underline{E}_1 - \underline{E}'_1 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \\ -j\underline{E}_2 + j\underline{E}'_2 = -j\underline{E}_3 \\ n(-j\underline{E}_2 - j\underline{E}'_2) = -jN\underline{E}_3 \end{cases}$$

On a donc $\underline{E}_3 = \underline{E}_2 - \underline{E}'_2$ que l'on réinjecte dans la quatrième équation.

On a alors :

$$\begin{cases} \underline{E}_1 + \underline{E}'_1 = \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 \\ \underline{E}_1 - \underline{E}'_1 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \\ n(\underline{E}_2 + \underline{E}'_2) = N(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \end{cases}$$

La troisième équation donne : $\underline{E}'_2(N+n) = \underline{E}_2(N-n)$.

La deuxième équation donne :

$$\underline{E}_1 - \underline{E}'_1 = n \left(\underline{E}_2 - \underline{E}_2 \frac{N-n}{N+n} \right) = n \underline{E}_2 \frac{2n}{N+n}.$$

D'où : $\underline{E}_2 = \frac{N+n}{2n^2} (\underline{E}_1 - \underline{E}'_1)$.

La première équation donne :

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 + \underline{E}'_1 &= \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 = [\underline{E}_2] \left(1 + \frac{N-n}{N+n} \right) \\ &= \left[\frac{N+n}{2n^2} (\underline{E}_1 - \underline{E}'_1) \right] \frac{2N}{N+n} \end{aligned}$$

Soit : $n^2(\underline{E}_1 + \underline{E}'_1) = (\underline{E}_1 - \underline{E}'_1)N$ et $\underline{E}'_1 = \underline{E}_1 \frac{N-n^2}{N+n^2}$.

Le coefficient de réflexion en amplitude est :

$$r = \frac{N-n^2}{N+n^2}$$

2. Pour avoir $r = 0$, il faut donc avoir $N = n^2$, soit

$$n = \sqrt{N} = 1,34$$

On dit que c'est une couche anti-reflet puisqu'il n'y a pas d'onde réfléchie en $x = 0$.

Si on choisit $\lambda = 560 \text{ nm}$, alors $e = \frac{\lambda}{4n} = 0,104 \text{ } \mu\text{m}$. La correction n'est donc en principe valable que pour une seule longueur d'onde. En pratique les résultats sont satisfaisants pour presque tout le spectre visible.

Dispersion – absorption pour des ondes électromagnétiques

Exercice 8.1 : Effet de peau et ARQS (PC-PSI)

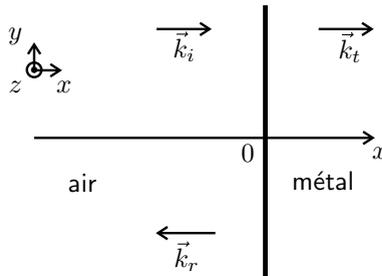
Une onde électromagnétique se propage dans l'air dans le demi-espace $x < 0$ vers un conducteur métallique de conductivité γ , de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de permittivité ε_0 , occupant le demi-espace $x > 0$. L'onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$ donne naissance à une onde réfléchie $\vec{E}_R = \underline{E}_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_z$ et à une onde transmise $\vec{E}_T = \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$ (k_R est réel alors que \underline{E}_{0R} , \underline{E}_{0T} et \underline{k}_T sont a priori complexes). On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_r \mu_0 \gamma \omega}}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \omega}{\gamma \mu_r}}$.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_r = 102$; $\gamma = 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
 $f = 10 \text{ kHz}$ et $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Montrer que $\rho(M, t)$ tend très rapidement vers 0. On considère que $\rho(M, t) = 0$ par la suite.
2. Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement dans le métal valent moins de un pour cent des courants de conduction ? On travaillera dans l'ARQS par la suite. Établir la relation de dispersion. Interpréter physiquement la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{k}_T . Calculer δ .
3. Les champs magnétiques complexes incident, réfléchi et transmis s'écrivent : $\vec{B}_i = a_i \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$, $\vec{B}_r = a_R \underline{E}_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_T = a_T \exp(i\phi_T) \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_y$. Exprimer les coefficients a_i , a_R , a_T et le déphasage ϕ_T en fonction de c , ω et δ .
4. Écrire les relations de passage pour les champs électrique et magnétique dans le plan $x = 0$ et trouver deux relations entre \underline{E}_{0R} , \underline{E}_{0T} , E_0 et α . Montrer que $\alpha \ll 1$. Exprimer $\vec{E}_T(M, t)$ dans le métal.

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un métal de conductivité finie. En écrivant les équations de Maxwell, on trouve l'équation de propagation et la relation de dispersion. Dans une certaine gamme de fréquences, on simplifie la relation de dispersion. On a une onde qui s'atténue très rapidement dans le métal. On met en évidence une profondeur de pénétration dans le métal qui correspond à la partie imaginaire du vecteur d'onde.



1. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$



Attention : la perméabilité vaut μ et non μ_0 .



La loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

L'équation de conservation de la charge est : $\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On a donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$.

L'équation différentielle vérifiée par ρ est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$.

La résolution donne : $\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 8,8 \times 10^{-19}$ s. Au bout de quelques τ on peut considérer que $\rho = 0$. On pourra donc supposer par la suite que le conducteur métallique est globalement neutre.

2. Condition pour être dans l'ARQS

On cherche la condition pour négliger les courants de déplacement, c'est-à-dire à se placer dans le cadre de l'ARQS (approximation des régimes quasi stationnaires). On doit avoir :

$$\left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{\varepsilon_0 2\pi f}{\gamma} \leq \frac{1}{100}$$

La condition pour être dans l'ARQS est donc : $f \leq \frac{\gamma}{200\pi\varepsilon_0}$, soit :

$$f \leq 1,8 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Équation de propagation

La méthode est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

On a donc :

$$-\Delta\vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\gamma\vec{E})$$

On obtient l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On obtient une **équation de diffusion**. Elle est irréversible parce qu'on a une dérivée première par rapport au temps. C'est prévisible puisqu'on a une dissipation d'énergie par effet Joule dans le métal à cause de la conductivité finie.

Remarque : On rencontre plusieurs phénomènes diffusifs en physique : diffusion thermique, diffusion de particules, diffusion de quantité de mouvement au sein des fluides visqueux, effet de peau en électromagnétisme...



Relation de dispersion

La méthode générale pour obtenir la relation de dispersion est de remplacer $\vec{E}_T = \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$ dans l'équation différentielle précédente en utilisant la notation complexe.

$$\Delta\vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = (-\underline{k}_T^2)\vec{E} = \mu\gamma i\omega\vec{E}$$

On a : $\underline{k}_T^2 = -(\mu\gamma i\omega) = i^2(\mu\gamma i\omega)$.



Il faut penser à écrire : que $-1 = i^2$ pour pouvoir écrire par la suite la racine carrée.



On a donc :

$$\underline{k}_T = \pm \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

Comme $\exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$\underline{k}_T = \pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

On a deux solutions : $\underline{k}_{T1} = \frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}$ et $\underline{k}_{T2} = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$.

Solution n°1 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T1} &= \underline{E}_{0T1} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\right) \end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x < 0$.

Remarque : On a bien un amortissement car x diminue quand l'onde se propage.



Solution n°2 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T2} &= \underline{E}_{0T2} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x > 0$.

La seule solution physiquement acceptable est la solution n°2 puisque le métal est illimité et qu'il ne peut donc pas y avoir d'onde réfléchie dans le métal. On a donc :

$$\underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

La partie réelle correspond au terme de propagation.

La partie imaginaire correspond au terme d'amortissement.

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de cette onde dans le milieu :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(\underline{k}_T)} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation. Les différentes ondes ne se propagent pas à la même vitesse. On dit que le milieu est dispersif.

δ est appelé la profondeur de pénétration dans le métal.

Au bout de quelques δ , le champ électrique a une amplitude négligeable dans le métal.

Application numérique :

$$\delta = 50 \mu\text{m}$$

3. Dans l'air, l'indice vaut 1. La relation de dispersion s'écrit pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM) : $\omega = kc$. On a : $\vec{k}_i = k\vec{u}_x$ et $\vec{k}_r = -k\vec{u}_x$. Soit :

$$\|\vec{k}_R\| = \|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}\| = k_R = k_i = k$$

On a des OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut donc utiliser les opérateurs : $\vec{\operatorname{rot}}\vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$.



Il faut bien lire l'énoncé, car il existe deux conventions pour l'écriture en complexes !!!



Pour une OPPM, on a : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. On en déduit les champs magnétiques :

$$\vec{B}_i = \frac{k\vec{u}_x \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z}{\omega} = -\frac{kE_0}{\omega} \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_R = \frac{-k\vec{u}_x \wedge \underline{E}_{0R} \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_z}{\omega} = \frac{k\underline{E}_{0R}}{\omega} \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_T = \frac{\underline{k}_T \vec{u}_x \wedge \underline{E}_T \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x))\vec{u}_z}{\omega} = -\frac{\underline{k}_T \underline{E}_T}{\omega} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x))\vec{u}_y$$

Dans le conducteur, on a : $\underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} = \frac{1}{\delta}\sqrt{2} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)$, d'où

$$-\frac{\underline{k}_T}{\omega} = \frac{-\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right)$$

On obtient finalement :

$$a_i = \frac{-1}{c} ; a_R = \frac{1}{c} ; a_T = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} ; \phi_T = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_T \exp(i\phi_T) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-1 + i) = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i)$$



Dans les exercices, il faut bien lire l'énoncé et regarder si on utilise le modèle du conducteur réel, pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant volumique \vec{j} non nul (même s'il ne prend de valeurs significatives que dans une petite épaisseur au voisinage de la surface) ou le modèle du conducteur parfait pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_S . Ici, la conductivité est finie. On utilisera les relations de passage en $x = 0$ avec $\vec{j}_S = \vec{0}$ et $\sigma = 0$.



4. On écrit les relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique en $x = 0$.

Côté 1 :

$x = 0^+$. Le champ électrique est : $\vec{E}_1 = \vec{E}_T$

Côté 2 :

$x = 0^-$. Le champ électrique est : $\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_R$

On a donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} E_0 + \underline{E}_{0R} = \underline{E}_{0T} \\ \frac{-E_0}{c} + \frac{\underline{E}_{0R}}{c} = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i) \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} E_0 + \underline{E}_{0R} = \underline{E}_{0T} \\ -E_0 + \underline{E}_{0R} = \frac{c}{\omega\delta} (-1 + i) \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

avec $\frac{c}{\omega\delta} = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{2}{\mu_R \mu_0 \gamma \omega}}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

On a donc : $\frac{c}{\omega\delta} = \sqrt{\frac{\mu_r \gamma}{2\varepsilon_0 \omega}} = \frac{1}{\alpha}$.

On a $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\mu_r \gamma}}$.

D'après la question 2) : $\left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \leq \frac{1}{100}$,

c'est-à-dire $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}} \leq \frac{1}{10}$.

On en déduit que $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\mu_r\gamma}} \leq \frac{1}{10} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}$, soit $\alpha \leq 1,4 \times 10^{-2}$.

Le système à deux équations et deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0R} + E_0 = \underline{E}_{0T} \\ \underline{E}_{0R} - E_0 = \frac{(-1+i)}{\alpha} \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, on a :

$$2E_0 = \underline{E}_{0T} \frac{(\alpha + 1 - i)}{\alpha}$$

$$\text{et } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i} \approx \frac{2\alpha}{1 - i} = \frac{2\alpha(1+i)}{2} = \alpha(1+i)$$

$$\text{D'où } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$$

$$\text{On a vu que } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}.$$

- Si $\gamma \rightarrow \infty$, on a le modèle du conducteur parfait, l'épaisseur de peau $\delta \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 0$. L'onde ne pénètre pas dans le métal. On a vu dans le cours que l'on a alors des courants en surface. Puisque $\underline{E}_{0T} \rightarrow 0$, alors $\underline{E}_{0R} = -E_0$. Toute l'onde incidente est réfléchiée.
- Si γ est finie, on a une onde qui peut pénétrer dans le métal mais elle est atténuée.

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$$

$$\text{avec } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

On a donc :

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{ix}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Finalement, on a :

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Exercice 8.2 : Plasma (PC-PSI)

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma constitué de N électrons libres par unité de volume de masse m et de N ions positifs par unité de volume de masse M et pratiquement immobiles. Une onde électromagnétique $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ se propage dans ce milieu. On pose

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F.m}^{-1}; e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}; N = 1,22 \times 10^{12} \text{ électrons/m}^3$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}; m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

1. Montrer que l'action du champ magnétique sur un électron est négligeable devant celle du champ électrique. Exprimer les vecteurs courant de conduction \vec{j}_c et courant de déplacement \vec{j}_d en fonction de \vec{E} , ω , ω_p et ε_0 . Établir l'équation de propagation et la relation de dispersion.

2. Montrer que la fréquence de l'onde doit être supérieure à une fréquence de coupure f_c pour avoir propagation. Calculer f_c . Dans le cas où il y a propagation, représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la fréquence. Exprimer l'indice dans le plasma en fonction de ω et ω_p .

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un plasma. On ne cherche pas comme dans l'exercice précédent sur l'effet de peau à négliger les courants de déplacement. Pour obtenir la relation de dispersion, il faut établir l'équation de propagation avec les équations de Maxwell et ensuite remplacer le champ électrique dans l'équation de propagation.

Pour que l'onde puisse se propager, on verra que la pulsation doit être supérieure à une pulsation de coupure. On verra l'application dans l'exercice sur la traversée de l'interface atmosphère - ionosphère.



1. On écrit le PFD à un électron de masse m dans le référentiel ($O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t$) galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

- Le poids est négligeable devant les autres forces.
- On néglige les interactions entre l'électron et les autres particules qui sont parfois modélisées par une force de frottement fluide.
- L'ordre de grandeur du champ magnétique est $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$. On a donc

$$\frac{\|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{qv_e E}{qcE} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1. \text{ On peut donc négliger la force magné-}$$

tique devant la force électrique.

On utilise le régime sinusoïdal forcé. Il faut faire attention à bien lire l'énoncé : $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\vec{u}_x$ et non $\vec{E} = E_0 \exp(-i(\omega t - kz))\vec{u}_x$.

Le vecteur vitesse est de la même forme : $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = i\omega\vec{v}_e$. On note le complexe i et non j pour ne pas confondre avec le vecteur densité de courant volumique.

Remarque : Il n'y pas de constante d'intégration quand on travaille en régime sinusoïdal forcé.



On a donc $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = im\omega\vec{v}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$, d'où $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{im\omega}$.

Le vecteur densité de courant de conduction volumique s'écrit :

$$\vec{j}_c = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

On a deux types de porteurs de charges mobiles : les ions positifs (notés i) de charge $+e$ et les électrons de charge $-e$.

On a donc : $\vec{j}_c = N(-e\vec{v}_e + e\vec{v}_i)$.

On peut démontrer comme pour les électrons que : $\vec{v}_i = \frac{e\vec{E}}{iM\omega}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \vec{j}_c &= N \left(\frac{e^2}{im\omega_e} + \frac{e^2}{iM\omega} \right) \vec{E} = \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \\ &\approx \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \end{aligned}$$

car d'après l'énoncé $M \gg m$.

On néglige donc l'effet des cations pratiquement immobiles.

On a donc : $\vec{j}_c = \frac{Ne^2}{im\omega} \vec{E} = -i \frac{Ne^2 \varepsilon_0}{m\varepsilon_0 \omega} \vec{E} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}$ puisque $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.

- Le vecteur densité de courant de conduction volumique vaut donc :

$$\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E} \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}.$$

- Le vecteur densité de courant de déplacement vaut :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Le rapport des deux densités de courant vaut :

$$\frac{j_c}{j_d} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d).$$

- \vec{j} dans l'équation de Maxwell-Ampère désigne le courant de conduction, noté \vec{j}_c dans l'exercice.
- \vec{j}_d désigne le courant de déplacement. Il est égal à $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On en déduit d'après la question précédente :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d) = \mu_0 \left(\frac{-\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \right) \vec{j}_d = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) i \omega \varepsilon_0 \vec{E}$$

Soit :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \partial \vec{E}}{c^2 \partial t}$$

Pour trouver la relation de dispersion, il suffit de remplacer l'expression du champ électrique dans l'équation de propagation.

$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ car $\text{div } \vec{E} = 0$ avec un plasma globalement neutre.

On a alors :

$$\vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On remplace $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ dans l'équation de propagation écrite en notation complexe pour en déduire la relation de dispersion :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}), \text{ d'où :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

2. • Si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$. k est imaginaire pur. On a une onde évanescente. Il n'y a pas de propagation.

• Si $\omega = \omega_p$ alors $k = 0$. Il n'y a pas de propagation.

• Si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et $k > 0$. On a une propagation.

Si $\omega \gg \omega_p$, alors $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ et $k \simeq \frac{\omega}{c}$. Tout se passe comme si on était dans le vide. Le courant de conduction étant nul : $\underline{\gamma} \rightarrow 0$. La pulsation est trop

grande. « Les électrons ne peuvent plus suivre » et ne se déplacent quasiment plus.

La pulsation de coupure est donc $\omega_c = \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$. On en déduit la fréquence de coupure :

$$f_c = f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

On étudie les pulsations $\omega > \omega_p$ pour lesquelles il y a propagation d'une onde électromagnétique. On a un filtre passe-haut.

Application numérique :

$$f_c = 9,9 \text{ MHz}$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}}$$

L'indice est défini $v_\phi = \frac{c}{n}$. On en déduit donc :

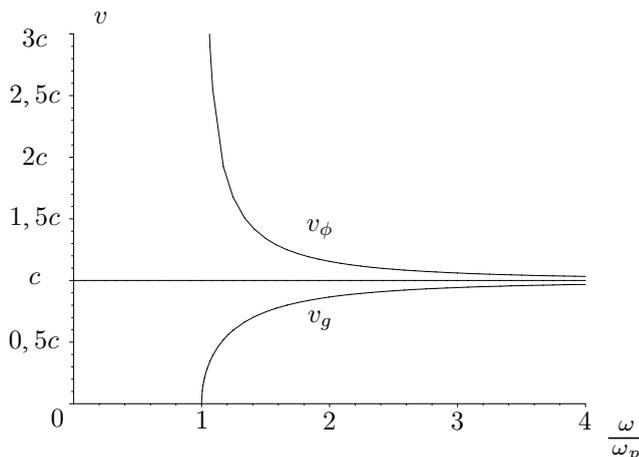
$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de groupe vaut : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Or $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$.

On écrit la différentielle : $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$.

On a donc : $v_g v_\phi = c^2$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_p}$.



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 8.3 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère (PC-PSI)

L'ionosphère peut être assimilée à un plasma neutre. On étudie la propagation des ondes radio à l'interface atmosphère – ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région $z > 0$ et l'atmosphère dans la région $z < 0$. Le champ incident est : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchiée et l'autre partie est transmise. L'indice de réfraction de l'ionosphère est $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_p = 6,9$ MHz.

1. Écrire les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour $z = 0$. Déterminer les coefficients de réflexion \underline{r} et de transmission \underline{t} en amplitude pour le champ électrique. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance. Quelle est la relation entre R et T ?
2. Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_p$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?
3. On se place maintenant dans le cas d'une incidence oblique, et on désigne par i l'angle d'incidence. A quelles conditions une onde peut-elle être transmise dans l'ionosphère ?
4. Un poste émetteur, au niveau de la mer, émet une onde radio de fréquence 12 MHz vers l'ionosphère, dans une direction faisant l'angle i avec la normale à l'interface. En supposant que l'onde arrive sur l'interface précédente sous forme d'onde plane, calculer l'angle i , à partir duquel l'onde incidente ne traversera plus l'interface.

Analyse du problème

On a étudié dans l'exercice précédent la propagation d'une onde dans un plasma. On s'intéresse à l'interface atmosphère-ionosphère et montrer quelles sont les conditions pour avoir réflexion totale.



1. Onde incidente :

Le champ électrique incident s'écrit : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique incident :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchi :

Le champ électrique réfléchi s'écrit : $\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique réfléchi :

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{u}_z \wedge r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{-r E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Onde transmise :

Il ne faut pas oublier l'indice n puisqu'on est dans le plasma.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\text{rot } \vec{E} = -i \vec{k}_t \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \omega \vec{B},$$

d'où $\vec{B} = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}}{\omega}$ avec $\omega = k_t v = k_t \frac{c}{n}$.

On a vu dans l'exercice sur le plasma que $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, soit

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Le champ électrique transmis s'écrit : $\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique transmis :

$$\begin{aligned} \vec{B}_t &= n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{\vec{u}_z \wedge t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{nt E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique

On n'a pas de densité surfacique de charges et de courants : $\sigma = 0$ et $\vec{j}_S = \vec{0}$.

On écrit les relations de passage en $z = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

Côté 1 : $z = 0^-$

Le champ électrique est : $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

Le champ magnétique est : $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$.

Côté 2 : $z = 0^+$

Le champ électrique est : $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$.

Le champ magnétique est : $\vec{B}_2 = \vec{B}_t$.

On a donc pour $z = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} E_0 + rE_0 = tE_0 \\ \frac{E_0}{c} - \frac{rE_0}{c} = \frac{ntE_0}{c} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = nt \end{cases}$$

On en déduit que $1 - r = n(1 - r)$,

$$\text{soit } r = \frac{1 - n}{1 + n} \text{ et } t = 1 + r = 1 + \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{2}{1 + n}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 - n}{1 + n} \\ t &= \frac{2}{1 + n} \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion en puissance vaut :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne refl chie}}{\text{puissance moyenne incidente}}$$



Attention : il faut revenir aux notations réelles pour calculer le vecteur de Poynting.



Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_i &= \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \end{aligned}$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{moy,i} = \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde réfléchie :

On pose $\underline{r} = r \exp(i\phi)$ avec r réel positif.

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_r &= \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} \\ &= \frac{r E_0 \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{-r E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_y \end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{-r^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{r^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ car l'onde se propage dans le sens $(-\vec{u}_z)$.

La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_z) = r^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde transmise :

Dans la suite de l'exercice, \underline{t} est réel et sera noté t .

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{t E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{nt E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{nt^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_z = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Le coefficient de réflexion en puissance est :

$$R = \frac{P_{moy,r}}{P_{moy,i}} = r^2 = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

Le coefficient de réflexion en amplitude peut être complexe (voir question 2). Il faut calculer le module de \underline{r} pour calculer R .

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{P_{moy,t}}{P_{moy,i}} = nt^2 = n \left(\frac{2}{1+n} \right)^2$$

On calcule la somme $R + T$:

$$R + T = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 + \frac{4n}{(1+n)^2} = \frac{1+n^2-2n+4n}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1$$

On a bien $R + T = 1$. Cette relation traduit la conservation de la puissance : toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie et l'onde transmise.

2. On a vu que $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. L'indice est donc complexe.

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = i^2 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right). \text{ On a donc } n = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \pm iX \text{ en}$$

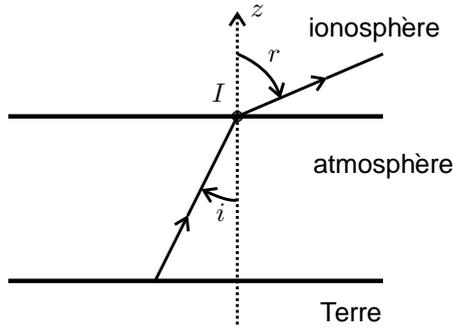
$$\text{posant } X = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}.$$

$$\text{Le coefficient } R \text{ vaut : } R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \frac{1+X^2}{1+X^2} = 1. \text{ On a donc :}$$

$$R = 1$$

L'interface ionosphère-atmosphère peut être assimilée à une surface parfaitement réfléchissante (miroir plan).

3.



Premier cas : $f < f_c$

On a vu qu'il y a toujours réflexion totale.

Deuxième cas : $f > f_c$

On applique les lois de Descartes au point d'incidence I : $\sin i = n \sin r$,
d'où $\sin r = \frac{\sin i}{n}$. On a réflexion totale si $\frac{\sin i}{n} > 1$.

On pose $\lambda = \text{Arcsin}(n)$.

Si $i > \lambda$, on a une réflexion totale.

Si $i < \lambda$, une onde de fréquence f peut traverser l'interface.

Remarque : l'indice n dépend de la fréquence de l'onde. On a dispersion de la lumière.

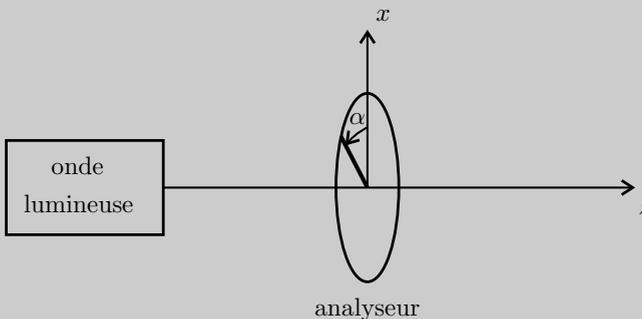


4. Application numérique : $\lambda = \text{Arcsin}(n) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}\right) = 42^\circ$

Si l'angle d'incidence est supérieur à 42° , l'onde incidente ne traversera plus l'interface et on aura réflexion totale.

Exercice 8.4 : Polarisation des ondes (PC)

On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle \vec{u} le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u})$.



1. On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0 . Comment est appelée cette loi ?

2. On considère une onde polarisée elliptiquement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α , E_{0x} et E_{0y} .

3. On remplace l'analyseur par une lame quart d'onde $\frac{\lambda}{4}$, d'épaisseur e . Pour une onde plane progressive monochromatique incidente polarisée rectilignement suivant Ox , l'indice de la lame est n_x . Pour une onde plane progressive monochromatique incidente polarisée rectilignement suivant Oy , l'indice de la lame est n_y . L'axe lent coïncide avec l'axe Ox et l'axe rapide coïncide avec l'axe Oy . Donner une relation d'ordre entre les indices n_x et n_y . Quelle relation a-t-on entre e , n_x , n_y et λ pour une onde plane progressive monochromatique incidente ?

4. L'onde incidente est l'onde étudiée dans la question 2. Donner l'expression du champ électrique à la sortie de la lame quart d'onde $\frac{\lambda}{4}$.

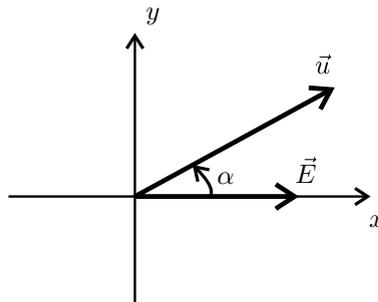
Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence d'un analyseur et d'une lame quart d'onde sur une onde lumineuse incidente.



1. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} . L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 = (E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha)^2$$

On en déduit la moyenne temporelle : $\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_0 \cos \alpha)^2$.

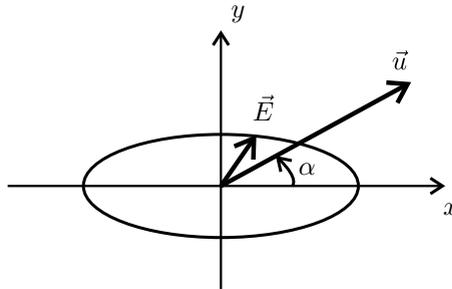
L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} E_0^2 \cos^2 \alpha = \varepsilon_0 \cos^2 \alpha$$

Cette loi est appelée loi de Malus.

2. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_{0x} \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha) \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} .

L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha)^2 + (E_{0x} \sin(\omega t) \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2 E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha E_{0x} \sin(\omega t) \sin \alpha \end{aligned}$$

On en déduit la moyenne temporelle :

$$\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_{0x} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{0x} \sin \alpha)^2$$

L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$$

3. Pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement suivant Ox , la vitesse de l'onde est : $v_x = \frac{c}{n_x}$.

Pour une OPPM polarisée rectilignement suivant Oy , la vitesse de l'onde est : $v_y = \frac{c}{n_y}$.

Comme Oy est l'axe rapide, on a donc $v_y > v_x$, soit :

$$n_y < n_x$$

Cours : Les axes Ox et Oy sont appelés les lignes neutres de la lame. On pose $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Avant la lame, on considère un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Dans la lame, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 z + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

À la sortie de la lame ($z = e$), le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 e + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Après la lame, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0(z - e) - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0(z - e) - n_y k_0 e + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a donc un déphasage entre la composante du champ électrique suivant Oy et la composante du champ électrique suivant Ox du au passage dans la lame d'épaisseur e :

$$\Delta\phi = n_x k_0 e - n_y k_0 e = \frac{2\pi}{\lambda} (n_x - n_y) e$$

Soit une différence de marche :

$$\delta = (n_x - n_y) e$$

Le champ électrique après la lame peut s'écrire en changeant l'origine des temps :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \phi + \Delta\phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$



La différence de chemin optique entre la composante du champ électrique suivant Oy et la composante du champ électrique suivant Ox est $\frac{\lambda}{4}$. On a donc :

$$\frac{\lambda}{4} = (n_x - n_y) e$$

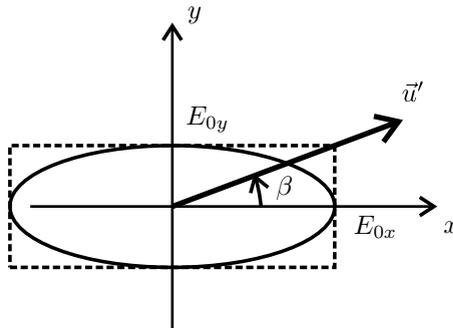
4. Pour la lame $\frac{\lambda}{4}$, on a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre la composante du champ électrique suivant Oy et la composante du champ électrique suivant Ox du au passage dans la lame, d'où :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin\left(\omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{sortie}} &= E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y \\ &= \cos(\omega t - k_0 z) (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) \end{aligned}$$

C'est une OPPM polarisée rectilignement suivant le vecteur \vec{u}' .



L'angle β est défini par :

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \\ \cos \beta = \frac{E_{0x}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \end{cases}$$

Comme les lignes neutres de la lame coïncident avec les axes de l'ellipse, la lame quart d'onde transforme une onde polarisée elliptiquement en une onde polarisée rectilignement.

Partie 4

Électromagnétisme

Plan

9. Calculs de champ électromagnétique	159
9.1 : Distribution volumique entre deux plans (PC-PSI)	159
9.2 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques (PC-PSI)	167
9.3 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis (PC-PSI)	169
9.4 : Champ électrostatique entre deux plaques (PC-PSI)	171
9.5 : Capacité d'un câble coaxial (PC-PSI)	173
9.6 : Superposition de nappes de courant planes (PC-PSI)	177
9.7 : Sphère en rotation (PC-PSI)	182
9.8 : Courants de Foucault dans un cylindre (PC-PSI)	185
9.9 : Cylindre, courants induits et ARQS (PC-PSI)	188
10. Induction électromagnétique	192
10.1 : Rail de Laplace (PC-PSI)	192
10.2 : Roue de Barlow (PC-PSI)	199
10.3 : Haut Parleur (PC-PSI)	203
10.4 : Moteur asynchrone (PC-PSI)	207
10.5 : Alternateur d'une éolienne (PC-PSI)	212
10.6 : Énergie magnétique du câble coaxial (PC-PSI)	216
10.7 : Pince ampèremétrique (PC-PSI)	219

Calculs de champ électromagnétique

Exercice 9.1 : Distribution volumique entre deux plans (PC-PSI)

On considère une distribution volumique D de charges ρ uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$ dans le référentiel $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique par 4 méthodes : théorème de Gauss, équation de Maxwell-Gauss, équation de Poisson et théorème de superposition. On prendra $V(0) = 0$. Étudier le cas particulier où $a \rightarrow 0$.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Le théorème de superposition permet de déduire directement le champ électrostatique créé par la distribution volumique à partir du champ créé par un plan infini.

Cours : Méthode de calcul du champ électrostatique et du potentiel électrostatique

Il y a deux stratégies pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés par une distribution de charges.

Stratégie n°1 : On calcule le champ électrostatique et on en déduit le potentiel électrostatique.

Pour calculer le champ, on a trois possibilités :

- Calcul direct du champ. Avec les plans de symétrie et d'antisymétrie, on prévoit la direction du champ. Le champ $d\vec{E}$ créé par une charge dq est donné par la loi de Coulomb :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM^2} \vec{u}_{K \rightarrow M} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{KM}}{KM^3}$$

On projette $d\vec{E}$ et on intègre les projections pour en déduire le champ créé par la distribution de charges.

- Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Utilisation du théorème de Gauss pour une surface fermée S :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Cette méthode donne des résultats simples pour des distributions hautement symétriques. Elle se fait en 3 étapes : recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie, recherche des invariances et application du théorème de Gauss (la surface de Gauss est une surface fermée par exemple un cylindre de hauteur h , une sphère, un parallélépipède).

On en déduit directement le potentiel en intégrant la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Stratégie n°2 : On calcule le potentiel électrostatique et on en déduit le champ électrostatique.

Pour calculer le potentiel, on a deux possibilités :

- Utilisation de la loi de Coulomb :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM}$$

avec $dq = \rho d\tau$ ou σdS ou λdl suivant que la distribution est volumique, surfacique ou linéique. Il reste à intégrer pour en déduire le potentiel V .

ATTENTION : Cette méthode n'est pas valable s'il y a des charges à l'infini.

- Utilisation de l'équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Il reste à intégrer l'équation différentielle pour déterminer le potentiel V .

Après avoir calculé le champ électrostatique, on en déduit le champ à partir de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Propriétés importantes en électrostatique

- Pour une distribution volumique, V et \vec{E} sont définis et continus en tout point de l'espace.
- Pour une distribution surfacique, \vec{E} est discontinu à la traversée de la surface de distribution : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ avec 1 et 2 des points de part et d'autre de la surface de distribution. Le potentiel V est continu en tout point de l'espace.
- Pour une distribution linéique, V et \vec{E} ne sont pas définis sur la distribution.

Il ne faut pas oublier que les distributions surfaciques et linéiques sont des modélisations et donc une approximation. Il ne faut pas être surpris d'avoir des résultats qui divergent.

Choix de la constante pour le potentiel électrostatique

Pour une distribution finie, on doit choisir $V(\infty) = 0$.

Par contre, pour une distribution infinie, on ne peut pas choisir $V(\infty) = 0$.

Dans ce cas, bien lire l'énoncé qui impose souvent un potentiel de référence.



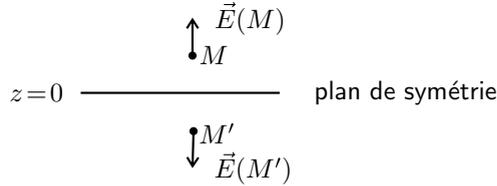
Structure du champ et du potentiel

- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_z$.

- La distribution D de charge est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , donc \vec{E} et V aussi. Les coordonnées du champ ne dépendent pas de x et y . Le potentiel ne dépend pas x et y . Bilan :

$$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z \text{ et } V = V(z).$$

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



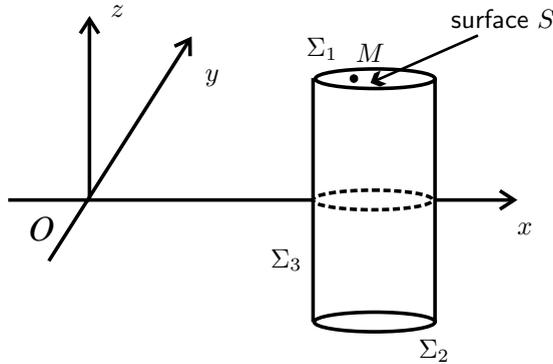
Le champ en M' est le symétrique du champ en M par rapport au plan $z = 0$, d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M)) = -E(z) \vec{u}_z \text{ et } V(M') = V(M)$$

Soit un point M appartenant au plan $z = 0$. Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$, $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, donc $\vec{E} = \vec{0}$ pour $z = 0$.

1. Première méthode : Utilisation du théorème de Gauss

Calcul du champ avec le théorème de Gauss :



On considère un point M dans la région $z > 0$. La surface de Gauss est un cylindre passant par M représenté sur la figure ci-dessus. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{3ext}$$

Le flux à travers la surface latérale Σ_3 est nul car le champ est orthogonal au vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur. On a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} (-E(z)) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

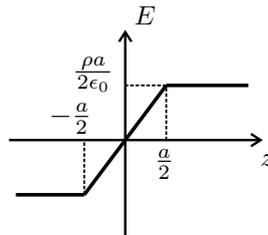
On a donc : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z) S.$

Il y a plusieurs cas pour calculer la charge intérieure :

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho a S$, on a donc $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.
- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho 2z S$, on a donc $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$

On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, alors $E = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$
- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq 0$, alors $E = -\frac{\rho |z|}{\epsilon_0} = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$



Si l'épaisseur a tend vers 0, on peut considérer la distribution comme surfacique. On peut définir une densité surfacique de charges σ .



Pour exprimer ρ en fonction de σ (c'est-à-dire passer d'une approximation volumique à une approximation surfacique pour les charges), il faut calculer la charge de deux façons.

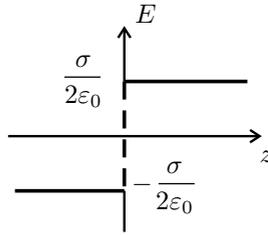


- Distribution surfacique : on considère une charge située en $z = 0$ et de surface S . La charge est $Q = \sigma S$.
- Distribution volumique : on considère une charge située dans un volume de surface S et de hauteur a . La charge est $Q = \rho Sa$.

Les deux charges doivent être égales. On a donc :

$$\sigma = \rho a$$

On retrouve bien le champ créé par un plan infini avec une discontinuité en $z = 0$.



Calcul du potentiel :

La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty) = 0$. On choisit d'après l'énoncé $V(0) = 0$.

Comme la distribution est volumique, le potentiel est continu en tout point de l'espace.

On a vu que le potentiel est une fonction paire de z . Il suffit de le calculer dans la région $z \geq 0$.

On utilise la relation : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ pour calculer le potentiel.

On considère un déplacement quelconque du point M :

$$d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

On a donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(z)\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = -E(z) dz$$

- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} dz$. On intègre entre 0 et z : $V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ puisque $V(0) = 0$. Le potentiel vaut en $z = \frac{a}{2}$:

$$V\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

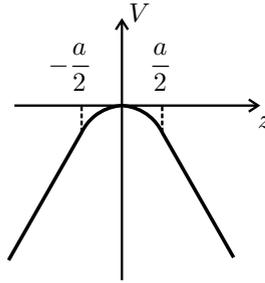
- Si $z \geq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz$. On intègre entre $\frac{a}{2}$ et z :

$$V - \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right)$$

D'où :

$$V = \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) - \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right)$$

On en déduit le graphe représentant V en fonction de z :



Remarque

On a continuité du potentiel en tout point de l'espace puisqu'on a une distribution volumique. On remarque que la dérivée première de V est continue. C'est prévisible puisque $E = -\frac{dV}{dz}$ et que le champ est continu en tout point de l'espace pour une distribution volumique.



2. Deuxième méthode : Équation de Maxwell-Gauss

On a vu que le champ électrique ne dépend que de z .
L'équation de Maxwell-Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE}{dz}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, donc $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0} + cte$. On a vu que $E = 0$ pour $z = 0$. Soit $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$.
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$ (localement il n'y a pas de charge), donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = \frac{a}{2}$ puisqu'on a une distribution volumique, donc $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$, donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = -\frac{a}{2}$, donc $E = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

3. Troisième méthode : Équation de Poisson

L'équation de Poisson est :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} V$$

Soit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On a vu que le champ et le potentiel sont nuls pour $z = 0$. Comme le potentiel ne dépend que de z , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 z} + A$ et $V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z^2 + Az + B$. Le champ électrostatique est $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$. On a : $E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} - A$.

Or $V = 0$ et $E = 0$ pour $z = 0$. On a donc : $A = 0$ et $B = 0$. On obtient finalement : $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$

- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A'z + B'$ et $E = -A'$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = \frac{a}{2}$. On a donc $A' = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A' \left(\frac{a}{2} \right) + B'$, d'où $B' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A''z + B''$ et $E = -A''$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = -\frac{a}{2}$. On a donc $A'' = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A'' \left(-\frac{a}{2} \right) + B''$, d'où $B'' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

4. Quatrième méthode : Théorème de superposition

La distribution volumique est la superposition de plaques d'épaisseur dz représentées sur le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \overline{\overline{\overline{\rho}}} \\ \downarrow \\ dz \end{array}$$

Pour trouver la relation entre σ, ρ et dz , il faut calculer la charge de deux façons : $dq = \sigma dS = \rho dz dS$.

On en déduit que :

$$\sigma = \rho dz$$

On utilise le champ créé par un plan infini ($\pm \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ - voir première méthode) pour en déduire le champ créé par la plaque d'épaisseur dz :

$$\begin{array}{c} \uparrow \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \\ \overline{\overline{\overline{\rho}}} dz \\ \downarrow -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \end{array}$$

Il reste à appliquer le théorème de superposition pour calculer le champ créé par la distribution de charges D .

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, le point M est au dessus de tous les plans. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$$

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, le point M est au dessous de tous les plans. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$. Le point M est au dessus des plans situés entre $-\frac{a}{2}$ et z alors qu'il est au dessous des plans situés entre z et $\frac{a}{2}$. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^z \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} + \int_z^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(z + \frac{a}{2} \right) - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - z \right) = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

Exercice 9.2 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques (PC-PSI)

On considère une charge q négative répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 . On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2 . Le champ électrostatique se met sous la forme : $\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique : $\text{div } \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r}$ avec $E_r = \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r$.

1. Déterminer $\rho(r)$ en fonction de a, r, R_1 et ε_0 .
2. Déterminer a en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2 .
3. Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace. Représenter graphiquement E_r en fonction de r .

Analyse du problème

L'équation de Maxwell-Gauss permet de calculer directement la densité volumique de charges à partir du champ électrostatique. Le théorème de Gauss permet d'en déduire le champ en tout point de l'espace.



1. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Comme $\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$, alors :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r} = a + \frac{2a(r - R_1)}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit : $\rho = \varepsilon_0 \left(a + 2a - \frac{2aR_1}{r} \right)$, soit :

$$\rho = a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right)$$

2. On connaît la charge totale q . On peut l'exprimer en fonction de a en utilisant ρ .

$$q = \iiint_{\text{distribution}} \rho \, d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_{r=R_1}^{R_2} a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right) 4\pi r^2 dr$$

Remarque

On peut également écrire le petit élément de volume en coordonnées sphériques : $d\tau = (dr) (r d\theta) (r \sin \theta d\phi)$.

Il reste à intégrer r entre R_1 et R_2 , θ entre 0 et π et ϕ entre 0 et 2π . On retrouve le même résultat.



On a alors :

$$q = 4\pi\epsilon_0 a \left[r^3 - R_1 r^2 \right]_{R_1}^{R_2} = 4\pi\epsilon_0 a (R_2^3 - R_1 R_2^2 - R_1^3 + R_1^3)$$

Finalement, on a :

$$a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2 (R_2 - R_1)}$$

3.

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie des sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

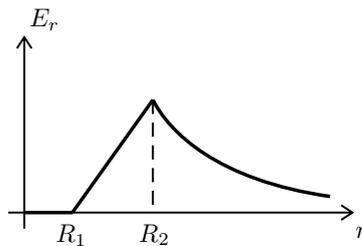
- On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r s'écrit :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Si $r \leq R_1$, $Q_{int} = 0$, donc $\vec{E} = \vec{0}$.

Si $r \geq R_2$, $Q_{int} = q$. Tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle. Le champ vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



Exercice 9.3 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis (PC-PSI)

On considère un fil infini d'axe Oz portant une densité linéique de charges constante λ .

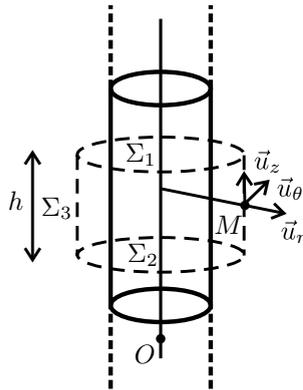
1. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} .
2. En déduire le potentiel électrostatique V .
3. On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz situés en $(x = -a, y = 0)$ et $(x = a, y = 0)$ portant respectivement des densités linéiques de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances r_1 et r_2 aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique. Comme la distribution est hautement symétrique, il est plus simple d'utiliser le théorème de Gauss. On applique le théorème de superposition pour calculer le potentiel créé par deux fils infinis.



1.



Calcul du champ électrostatique en trois étapes

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges (sources du champ), donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h$$

Les trois surfaces formant (Σ) sont : (Σ_1) surface supérieure, (Σ_2) surface inférieure et (Σ_3) surface latérale. Le flux à travers la surface supérieure et la surface inférieure est nul car le champ électrostatique est orthogonal au vecteur élément de surface.



On ne peut pas prendre comme surface de Gauss un cylindre infini ! La surface de Gauss doit être une surface fermée. Le vecteur élément de surface doit être orienté vers l'extérieur.



Le point M est nécessairement à l'extérieur du fil. La charge intérieure est :

$$Q_{int} = \lambda h.$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Interprétation physique :

Le champ électrostatique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

2. On en déduit directement le potentiel électrostatique à partir de la

relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$.

On considère un déplacement quelconque dans l'espace :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

On a alors :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) = -E(r) dr$$

Soit :

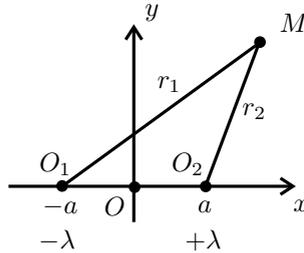
$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

On intègre la relation précédente :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cte$$

La distribution est infinie. On ne peut donc pas choisir : $V(\infty) = 0$. L'énoncé ne précise pas la constante dans cette question.

3.



On applique le théorème de superposition.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + cte' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + cte'$$

D'après l'énoncé, $V = 0$ si $r_1 = r_2$. On a donc :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Exercice 9.4 : Champ électrostatique entre deux plaques (PC-PSI)

On considère un condensateur plan formé de deux plaques parallèles infinies et distantes de d . L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2 . On néglige les effets de bord.

1. Rappeler les équations de Poisson et de Laplace pour l'électrostatique.
2. Déterminer le potentiel et en déduire le champ électrostatique \vec{E} qui règne entre les armatures de ce condensateur.
3. Ce condensateur est placé dans un milieu où règne une densité volumique de charges ρ uniforme. Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique.

Analyse du problème

On va utiliser une autre méthode que le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique. Avec l'équation de Poisson, on va calculer le potentiel. On pourra alors en déduire directement le champ électrostatique.



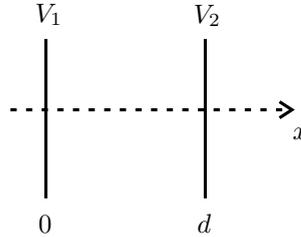
1. L'équation de Poisson en électrostatique s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'équation de Laplace pour l'électrostatique est le cas particulier où la densité volumique de charges est nulle :

$$\Delta V = 0$$

2.



On néglige les effets de bord (c'est-à-dire que l'épaisseur d est faible devant les dimensions des plaques considérées comme infinies). Dans ces conditions la distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_y et \vec{u}_z , donc V aussi. On en déduit que :

$$V = V(x)$$

Dans l'espace entre les plaques qui est vide de charge, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

En coordonnées cartésiennes, on a $\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$. On a donc :
 $V = Ax + B$.

Conditions aux limites

$V = V_1$ pour $x = 0$ et $V = V_2$ pour $x = d$.

On en déduit : $\begin{cases} V_1 = B \\ V_2 = Ad + B \end{cases}$ soit $A = \frac{V_2 - V_1}{d}$.

Finalement, on a :

$$V = \frac{-(V_1 - V_2)}{d}x + V_1$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{d} \vec{u}_x$$

Le champ est uniforme entre les armatures du condensateur.

3. Entre les armatures, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Une première intégration donne : $\frac{dV}{dx} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} x + C_1$.

Une deuxième intégration donne : $V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} V_1 = C_2 \\ V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{2} + C_1 d + C_2 \end{cases}$$

D'où $C_1 = \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$.

On obtient :

$$V = \frac{-\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) x + V_1$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{V_2 - V_1}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_x$$

Exercice 9.5 : Capacité d'un câble coaxial (PC-PSI)

Un câble coaxial est formé d'un conducteur cylindrique plein, de rayon R_1 , de charge Q , de longueur h , d'axe Oz , de potentiel $V_1 > 0$, entouré d'un conducteur cylindrique creux, de rayon intérieur R_2 , de charge $-Q$, de potentiel $V_2 = 0$. Le vide sépare les deux conducteurs. On néglige les effets de bord. On pose $U = V_1 - V_2$. La capacité C du câble coaxial est définie par $Q = CU$. On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

1. Exprimer le potentiel $V(r)$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ en fonction de U, r, R_1 et R_2 . En déduire le champ électrostatique \vec{E} .
2. En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrostatique en fonction de Q et h . En déduire la capacité C du câble coaxial.

3. Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée et l'exprimer en fonction de C et U .
4. On suppose que $R_2 = R_1 + e$, avec $e \ll R_1$. Déterminer dans ces conditions la capacité du condensateur.

Analyse du problème

On cherche à calculer la capacité d'un conducteur cylindrique. La démarche est guidée en calculant de deux façons le champ électrostatique.

Il faut savoir calculer l'énergie électrostatique à partir de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Si l'épaisseur est très faible devant le rayon des cylindres, on retrouve alors la formule du condensateur plan.



1. La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z puisqu'on néglige les effets de bord. Le potentiel est donc aussi invariant par rotation et par translation donc : $V = V(r)$.

Dans le vide, le potentiel doit vérifier l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Comme V ne dépend que de r , on a :

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

soit $r \frac{dV}{dr} = A$. On sépare les variables : $dV = \frac{A}{r} dr$. En intégrant, on a $V = A \ln r + B$.

Conditions aux limites

On connaît le potentiel pour $r = R_1$ et $r = R_2$:

$$\begin{cases} U = A \ln R_1 + B \\ 0 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

On en déduit : $A = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$ et $B = 0 - A \ln R_2 = -\frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2$.

Finalement, $V = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln r - \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2$, soit

$$V = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2}$$

On en déduit le champ électrostatique :

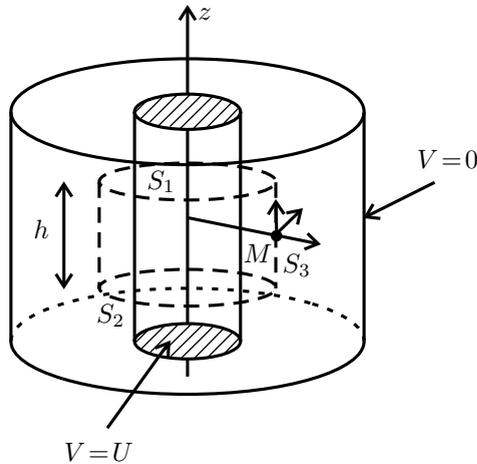
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

On a donc :

$$\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$$

On vérifie le signe positif de E_r si U est positif : le champ électrostatique est bien dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

2.



Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie pour les charges, donc $\vec{E} \in P \cap Q$, c'est-à-dire $\vec{E} // \vec{u}_r$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z , donc \vec{E} aussi.

Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée définie par S_1, S_2 et S_3 (traits en pointillés sur la figure).

Le flux à travers les surfaces S_1 et S_2 est nul. On a alors :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{S_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS_3 \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

On a vu que $\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$. En comparant les deux expressions, on a :

$$\frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On en déduit la capacité :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3. L'énergie électrostatique est : $U_{el} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau$

On a vu que $\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$. Il faut intégrer z entre 0 et h , θ entre 0 et 2π et r entre R_1 et R_2 . On en déduit :

$$\begin{aligned} U_{el} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{r^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} dr r d\theta dz \\ &= \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz \end{aligned}$$

Soit :

$$U_{el} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} 2\pi h = \frac{1}{2} \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} U^2$$

On retrouve le résultat de l'énergie emmagasinée par un condensateur :

$$U_{el} = \frac{1}{2} C U^2$$

4. On étudie le cas particulier où $\frac{R_2}{R_1} \ll 1$. On pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

On fait un développement limité au premier ordre :

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}.$$

On a donc $C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{e}{R_1}}$, soit

$$C \approx \frac{\epsilon_0 S_1}{e}$$

On retrouve la formule du condensateur plan avec $S_1 = 2\pi R_1 h$.

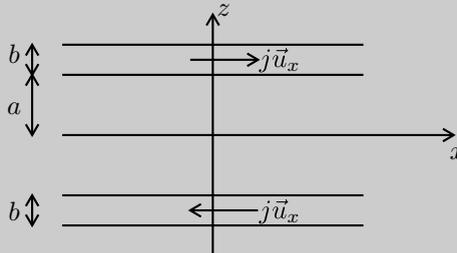
Exercice 9.6 : Superposition de nappes de courant planes (PC-PSI)

Soit D une distribution infinie de courants, constituée de deux couches planes parallèles, d'épaisseur b . Ces deux couches sont séparées par un interstice d'épaisseur $2a$. Elles sont parcourues par des courants volumiques uniformes et opposés $+j\vec{u}_x$ et $-j\vec{u}_x$ respectivement.

1. Question préliminaire : On considère une seule nappe de courants plane située en $z = 0$. Le courant surfacique uniforme est $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$. Déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.

2. Déterminer le champ magnétostatique de la distribution D en un point de l'axe $z = 0$ en utilisant la résultat de la question 1.

3. En déduire le champ magnétostatique de la distribution D en tout point de l'espace en appliquant le théorème d'Ampère.



Analyse du problème

La première question est une question de cours classique. Pour calculer le champ magnétostatique en $z = 0$, on considère qu'une couche de courants volumiques est la superposition de nappes de courants planes. Il faut savoir passer d'une distribution surfacique à une distribution volumique pour appliquer le théorème de superposition.

Cours : Calcul de champ magnétostatique

Il y a deux stratégies pour calculer le champ magnétostatique créé par une distribution de courants :

- **Stratégie n°1** : Utilisation de la loi de Biot et Savart. Cette première stratégie se fait en trois étapes :

- 1) Étude des symétries pour prévoir la direction du champ magnétostatique.
- 2) Le champ magnétostatique créé par un élément de courant $d\vec{C}$ est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}_{K \rightarrow M}}{KM^2}$$

avec $d\vec{C} = I d\vec{l} = \vec{j}_s dS = \vec{j} d\tau$ suivant que la distribution est linéique, surfacique ou volumique.

- 3) On projette $d\vec{B}$ et on intègre la projection.

- **Stratégie n°2** : Utilisation du théorème d'Ampère. Cette deuxième stratégie se fait en trois étapes :

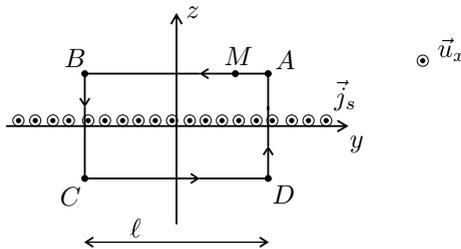
- 1) Étude des symétries.
- 2) Étude des invariances.
- 3) Application du théorème d'Ampère avec un contour Γ ferme et orienté :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Les calculs sont bien plus plus simples qu'avec la méthode 1 pour des distributions hautement symétriques. N'oubliez pas qu'il y a plusieurs cas pour calculer les courants enlacés : intérieur de la distribution, extérieur de la distribution, $z > 0$, $z < 0$...



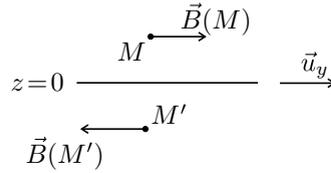
1. On considère une nappe de courants plane de vecteur densité surfacique de courants : $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$.



- La distribution de courants est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , les coordonnées du champ magnétostatique ne dépendent que de z .
- Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants, source du champ magnétostatique. Le champ \vec{B} est donc suivant \vec{u}_y .

Bilan : $\vec{B} = B(z) \vec{u}_y$.

- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



Le champ au point M' est l'opposé du symétrique du champ au point M :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M)) = -\vec{B}(M) = -B(z)\vec{u}_y$$

- On applique le théorème d'Ampère avec le contour $ABCD$ pour calculer le champ magnétostatique au point M avec $z > 0$.

Remarque

Le contour d'Ampère est orienté. Il faut faire attention aux signes lors du calcul de la circulation.

$$\int_A^B \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_A^B B(z)\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = B(z)(y_B - y_A) = -B(z)\ell$$

$$\int_B^C \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ car le champ est orthogonal au déplacement } \vec{dl}$$

$$\int_C^D \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_C^D -B(z)\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -B(z)(y_D - y_C) = -B(z)\ell$$

car le champ en un point du segment $[CD]$ est $-B(z)\vec{u}_y$

$$\int_D^A \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ car le champ est orthogonal au déplacement } \vec{dl}.$$



$$\int_{ABCD} \vec{B} \cdot \vec{dl} = -B(z)\ell - B(z)\ell = \mu_0 j_s \ell$$

Si $z > 0$:

$$\vec{B} = -\mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y$$

On en déduit le champ magnétostatique dans la région $z < 0$:

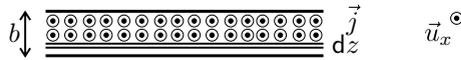
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y$$

Remarque

On a bien une discontinuité du champ magnétostatique à la traversée de la surface de distribution puisqu'on a une distribution surfacique.

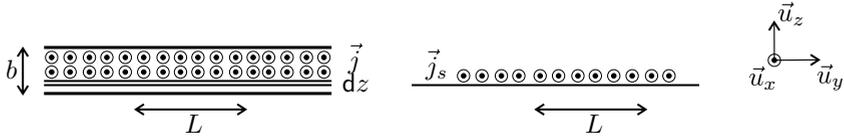


2. La distribution volumique de la région 1 (comprise entre a et $a + b$) est la superposition de plaques de courants d'épaisseur dz représentées sur le schéma ci-dessous :



Relation entre j, j_s et dz pour une plaque élémentaire :

On calcule le courant de deux façons pour une plaque élémentaire d'épaisseur dz :



- Distribution volumique : La surface perpendiculaire aux lignes de courant est dzL . On a alors : $I = jdzL$.
- Distribution surfacique : Le courant qui traverse la « ligne d'arrivée » L est $I = j_sL$.

On a donc $I = jdzL = j_sL$, soit :

$$j_s = jdz$$

Champ magnétique créé par la région 1 située entre $z = a$ et $z = a + b$:

Le champ magnétique créé par une plaque élémentaire d'épaisseur dz est :

$$dB_1 = \mu_0 \frac{j_s}{2} = \mu_0 \frac{jdz}{2}$$

Remarque : On a une contribution positive que l'on peut vérifier avec la règle de la main droite. Le point M est en dessous de la distribution volumique.



On intègre z entre a et $(a + b)$, d'où :

$$B_1 = \int_a^{a+b} \mu_0 \frac{jdz}{2} = \mu_0 \frac{jb}{2}$$

Champ magnétique créé par la région 2 située entre $z = -a - b$ et $z = -a$:

Le vecteur densité de courants de la région 2 est $-j\vec{u}_x$ mais comme le point M est au dessus de la région 2 alors le champ magnétique créé par une plaque élémentaire d'épaisseur dz est :

$$dB_2 = \mu_0 \frac{jdz}{2}$$

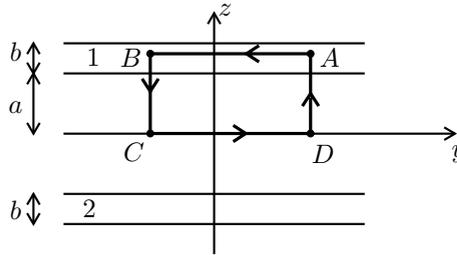
On intègre z entre $(-a - b)$ et $(-b)$, d'où :

$$B_2 = \int_{-a-b}^{-a} \mu_0 \frac{jdz}{2} = \mu_0 \frac{jb}{2}$$

Champ magnétique total en un point de l'axe $z = 0$:

$$\vec{B} = \mu_0 j b \vec{u}_y$$

3.



- La distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , les coordonnées du champ magnétostatique ne dépendent que de z .
- Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie. Le champ est donc suivant \vec{u}_y .

Bilan : $\vec{B} = B(z) \vec{u}_y$

- On applique le théorème d'Ampère avec le contour $ABCD$ avec $z > 0$:

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(z)l + \mu_0 j b l = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Si $0 \leq z \leq a$:

Le courant enlacé est nul. Le champ magnétostatique est :

$$B = \mu_0 j b$$

Si $a \leq z \leq b$:

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = j l (z - a)$. D'où :

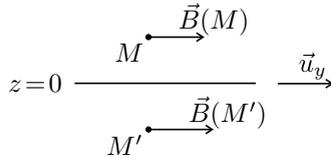
$$B = \mu_0 j (b - z + a)$$

Si $b \leq z$:

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = j l b$. D'où :

$$B = 0$$

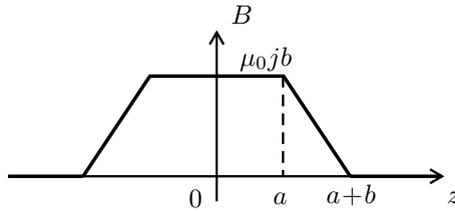
Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie.



On en déduit le champ au point M' en fonction du champ au point M :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M)) = \vec{B}(M)$$

Le graphe représentant B en fonction de z est donc une fonction paire.



Exercice 9.7 : Sphère en rotation (PC-PSI) *

On considère une sphère isolante de rayon R , de centre O , chargée en surface avec la densité surfacique de charges σ uniforme. On la met en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Oz .

1. Calculer le champ créé par une spire circulaire parcourue par un courant I en un point de l'axe.
2. En déduire le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé au point O , centre de la sphère.
3. Calculer le moment magnétique \vec{M} de la sphère.

On rappelle que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

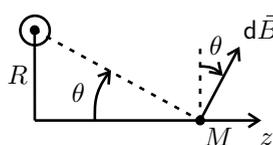
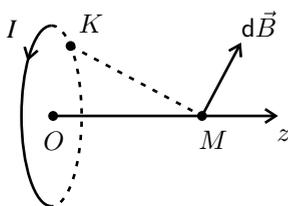
Analyse du problème

La première question est une question de cours classique. Vous devez connaître le résultat et être capable de le redémontrer très rapidement.

La deuxième question est plus délicate puisqu'on va décomposer la distribution en spires élémentaires parcourues par un courant dI . Il restera alors à intégrer toutes les contributions pour calculer le champ magnétostatique résultant.



1.



Tous les plans passant par M et contenant l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de courants, donc $\vec{B}(M)$ appartient à l'intersection des plans d'antisymétrie. On en déduit que $\vec{B}(M) // \vec{u}_z$.

La loi de Biot et Savart s'écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{K \rightarrow M}}{KM^2}$$

On calcule le champ magnétostatique \vec{B} dans la région $z > 0$.

La projection sur l'axe Oz est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{KM^2} \sin \theta$$

On peut sortir KM et $\sin \theta$ de l'intégrale puisqu'ils sont constants quand on se déplace sur la spire pour décrire la distribution. Le champ résultant est :

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{KM^2} \sin \theta \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{KM^2} (\sin \theta) 2\pi R$$

Comme $\sin \theta = \frac{R}{KM}$, on en déduit que : $\frac{1}{KM^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$. On a donc :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.

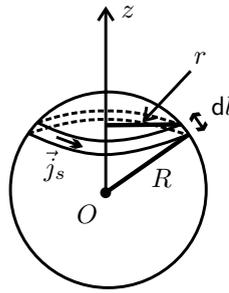
On a calculé le champ en M dans la région $z > 0$.

On en déduit immédiatement le champ en M' symétrique de M par rapport au plan $z = 0$. Ici $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$.

Pour une spire vue sous un angle 2θ , le champ créé sur l'axe est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

2.



On a des charges en surface qui tournent autour de l'axe Oz . On va décomposer la distribution en spires élémentaires parcourues par un courant dI . Soit un élément de longueur $dI = R d\theta$. On a une spire de rayon $r = R \sin \theta$ parcourue par un courant $dI = j_s R d\theta$ avec $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$. On a un mouvement circulaire uniforme : $v = r\omega = R \sin \theta \omega$. On a donc

$$dI = (\sigma v) R d\theta = \sigma (R \sin \theta \omega) R d\theta = \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta$$

D'après la première question, le champ créé par une spire parcourue par un courant dI est :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta)}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Il reste à intégrer θ entre 0 et π . D'après l'énoncé, $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$. On a

donc :

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{4}{3} = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}$$

On obtient finalement :

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3} \vec{u}_z$$

3. La spire parcourue par un courant dI a un moment magnétique élémentaire :

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= S dI \vec{u}_z = (\pi r^2) (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta) \vec{u}_z \\ &= (\pi R^2 \sin^2 \theta) (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta) \vec{u}_z \end{aligned}$$

On a donc :

$$d\vec{M} = \pi R^4 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z$$

Il reste à intégrer θ entre 0 et π pour en déduire le moment magnétique :

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} \pi R^4 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z = \pi R^4 \sigma \omega \frac{4}{3} \vec{u}_z$$

On en déduit finalement :

$$\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \omega \vec{u}_z$$

Exercice 9.8 : Courants de Foucault dans un cylindre (PC-PSI)

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. On admet $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$. Montrer que $\vec{E}(P) = \frac{r \omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$ en utilisant deux méthodes.
2. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$? Expliquer l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

Analyse du problème

Le champ magnétique extérieur dépend du temps. Il va donc créer un champ électrique calculé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Il va y avoir naissance de courants induits dans le cylindre conducteur et donc une puissance dissipée par effet Joule.



1. L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet de calculer le champ électrique :

Méthode 1 :

On utilise le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial B}{\partial t} = B_0 \omega \sin (\omega t)$$

On peut écrire des dérivées droites car les fonctions ne dépendent que de r .

On a donc : $\frac{d(r E_\theta)}{dr} = r B_0 \omega \sin (\omega t)$, soit $d(r E_\theta) = r B_0 \omega \sin (\omega t) dr$.

On intègre : $r E_\theta = \frac{r^2}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) + C_1$,

d'où $E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) + \frac{C_1}{r}$.

Le champ est défini pour $r = 0$, donc $C_1 = 0$.

Remarque : On néglige le champ magnétique créé par les courants induits.



Méthode 2 :

La deuxième méthode consiste à calculer la circulation du champ électrique et d'appliquer le théorème de Stokes pour en déduire directement le champ électrique. On utilise le théorème de Stokes dans de nombreux domaines de la physique : théorème d'Ampère, écoulement rotationnel en mécanique des fluides (voir exercice sur le cyclone)...

On calcule la circulation de \vec{E} dans le cylindre sur un cercle de rayon r avec $0 \leq r \leq R$ car $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = E(r) 2\pi r = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

avec S une surface qui s'appuie sur le contour Γ et orientée par la règle de la main droite suivant \vec{u}_z .

On a donc : $E(r) 2\pi r = \iint_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S} = (B_0 \omega \sin (\omega t)) \pi r^2$, d'où :

$$E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t)$$

2. La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) \right)^2$$

On a donc :

$$dP_J = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2 dr r d\theta dz$$

On intègre sur tout le cylindre : r varie entre 0 et R , z entre 0 et L et θ entre 0 et 2π .

On obtient :

$$P_J = \gamma \frac{R^4}{16} (B_0 \omega \sin(\omega t))^2 2\pi L$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle P_J \rangle = \gamma \frac{R^4}{16} B_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} 2\pi L = \frac{\gamma B_0^2}{16} \pi L (2\pi f)^2 \left(\frac{S_0}{\pi} \right)^2$$

puisque la moyenne de $\sin^2(\omega t)$ sur une période vaut $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2 S_0^2$$

3. On pose $K = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2$, soit $\langle P_J \rangle = K S_0^2$.

Si au lieu d'un seul conducteur, on utilise N conducteurs cylindriques de section S'_0 , la puissance dissipée par effet Joule est :

$$\langle P'_J \rangle = N (K (S'_0)^2)$$

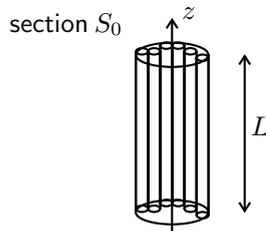
puisque la puissance totale est la somme des puissances moyennes dissipées dans chacun des conducteurs.

Comme $S'_0 = \frac{S_0}{N}$, on a :

$$\langle P'_J \rangle = N \left(K \frac{S_0^2}{N^2} \right) = \frac{\langle P_J \rangle}{N}$$

La puissance est divisée par N , d'où l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

On représente sur le schéma ci-dessous quelques cylindres de surface S'_0 .



Exercice 9.9 : Cylindre, courants induits et ARQS (PC-PSI)*

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L ($L \gg R$) et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. Montrer que le champ électrique se met sous la forme $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.
2. On a vu dans l'exercice précédent que $\vec{E} = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$. Calculer par trois méthodes le champ magnétique induit et montrer par une des trois méthodes que le champ magnétique induit est nul pour $r = R$.
3. Donner une condition pour que le champ magnétique induit soit négligeable devant B_0 .

Analyse du problème

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent. L'étude des symétries est assez délicate car le dispositif créant le champ extérieur n'est pas précisé dans l'énoncé et la cause du champ électrique est un courant dépendant du temps.



1. Le champ extérieur est $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. L'énoncé ne précise pas le dispositif qui crée le champ magnétique extérieur. Il peut être créé par exemple par un solénoïde infini parcouru par un courant $I(t)$ d'axe Oz . Le champ magnétique créé par le solénoïde est alors :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$$

On peut l'identifier au champ :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Comme le champ magnétique dépend du temps, il va créer un champ électrique.

Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \in P$.

Le plan $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \perp Q$.

La distribution de courants circulant dans le solénoïde est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz . Les coordonnées de \vec{E} ne dépendent pas de r et de θ .

Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.

Remarque : on vérifie que \vec{B} est colinéaire à \vec{u}_z puisque $\vec{B}(M) \perp P$.

On a vu dans l'exercice précédent comment calculer le champ électrique par deux méthodes.

Cours : Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à négliger les phénomènes de propagation : il faut étudier les phénomènes physiques à des distances des sources très inférieures à la longueur d'onde dans la vide.

On peut montrer que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère.

On a les mêmes équations qu'en régime indépendant du temps sauf pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Le champ électrique n'est pas à circulation conservative contrairement à ce qui se passe en régime stationnaire (voir chapitre sur l'induction).



2. On se place dans le cadre de l'ARQS. Le champ électrique crée un courant de conduction, noté \vec{j}_{induit} :

$$\vec{j}_{\text{induit}} = \gamma \vec{E} = \gamma E(r) \vec{u}_\theta$$

Tout se passe comme si on avait des spires d'axe Oz parcourues par un courant.

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ source du champ magnétique induit \vec{B}_i est un plan de symétrie, donc $\vec{B}_i(M) \perp P$ et $\vec{B}_i(M) // \vec{u}_z$.
- La distribution de courants source de \vec{B}_i est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz .
- Bilan : $\vec{B}_i = B_i(r) \vec{u}_z$.

Il y a trois méthodes pour calculer le champ magnétique induit \vec{B}_i :



Dans le cadre de l'ARQS, le calcul du champ magnétique induit se fait à partir de l'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}}$.



Méthode 1 :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} = \mu_0 \gamma \vec{E}$.

On a donc : $-\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} = \mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t)$.

Comme le champ B_i ne dépend que de r , on peut séparer les variables :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) dr$$

L'intégration donne : $B_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$.

On va démontrer avec la méthode 3 que : $B_i(r = R) = 0$. On a donc :

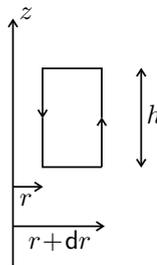
$$B_i(r = R) = 0 = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 R^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$$

On en déduit que :

$$B_i(r) = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 (r^2 - R^2) \omega}{4} \sin(\omega t)$$

Méthode 2 :

On applique le théorème d'Ampère à un rectangle de largeur dr et de hauteur h .



$$B_i(r + dr) h - B_i(r) h = - \int_S \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} \cdot \vec{dS} = -\mu_0 \gamma E dr h$$

car dr est un infiniment petit.

On a donc :

$$\frac{dB_i}{dr} dr = -\mu_0 \gamma E dr$$

D'où :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) dr$$

On retrouve le même calcul qu'avec la méthode 1.

Méthode 3 :

On considère qu'on a une superposition de solénoïdes infinis puisqu'on néglige les effets de bord. Le champ créé par un solénoïde infini parcouru par des courants surfaciques est : $\mu_0 j_S \vec{u}_z$.

Il faut passer de l'approximation surfacique à l'approximation volumique :

$$j_S dz = j_{\text{induit}} dr dz$$

On a donc :
$$dB_i = \mu_0 j_{\text{induit}} dr = \mu_0 \gamma E dr = \mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) dr.$$

On intègre entre r et R pour calculer la somme de toutes les contributions. En effet, les solénoïdes situés entre 0 et r créent à l'extérieur un champ nul.

On obtient :

$$B_i(r) = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 (r^2 - R^2) \omega}{4} \sin(\omega t)$$

Remarque : On démontre par cette méthode que le champ magnétique induit est nul pour $r = R$.



3. Pour que le module de \vec{B}_i reste inférieur à B_0 , il faut que $\mu_0 \gamma \omega \frac{B_0 R^2}{4} \ll B_0$ puisque le champ magnétique induit est maximal pour $r = 0$. On doit avoir :

$$R \ll \frac{2}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On a vu dans l'exercice sur l'effet de peau que l'épaisseur de peau est

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

On doit donc avoir :

$$R \ll \sqrt{2} \delta$$

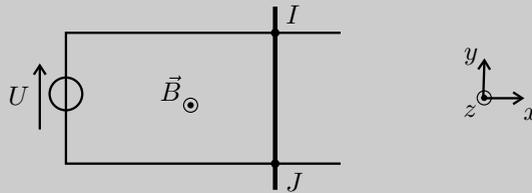
10

Induction électromagnétique

Exercice 10.1 : Rail de Laplace (PC-PSI)

On considère une tige métallique de longueur $\ell = IJ$ pouvant se déplacer sur l'axe Ox . Elle glisse sans frottement sur des rails électriques. Le dispositif est placé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Le générateur de tension délivre une tension constante U . La résistance totale du circuit est notée R et ne dépend pas de la position sur les rails. La tige est immobile à $t = 0$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

1. Déterminer la vitesse de la tige et l'intensité du courant électrique circulant dans le circuit en fonction du temps.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.



Analyse du problème

Le générateur de tension U crée un courant électrique. La tige métallique est parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique stationnaire. Elle subit donc une force de Laplace qui la met en mouvement. On a alors une variation du flux magnétique. C'est un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une fem d'induction. La **loi de Lenz** est une **loi de modération** : les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

On néglige le champ magnétique induit devant le champ magnétique extérieur. Pour en tenir compte, il faudrait rajouter l'inductance propre L du circuit que l'on néglige dans l'exercice.

Cours : Un phénomène d'induction apparaît lorsqu'il y a une variation du flux du champ magnétique.

Loi de Faraday et équations de Maxwell

Sauf indication contraire, on se placera dans le cadre de l'ARQS pour les exercices d'induction en l'absence d'accumulation de charges.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Le champ électrique est :

$$\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ est la forme intégrée de la relation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Etude des conducteurs filiformes

Il faut d'abord orienter le conducteur (éventuellement les conducteurs s'il y a plusieurs noeuds).

Pour tenir compte du phénomène d'induction, on rajoute pour chaque conducteur **une force électromotrice d'induction e en convention générateur.**

On note Φ le flux du champ magnétique à travers le conducteur. La force électromotrice se calcule avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

On va étudier d'autres possibilités pour calculer la fem d'induction.

On redessine alors le schéma électrique équivalent en ayant rajouté pour chaque conducteur la fem d'induction en convention générateur.

Remarque : Si on étudie des conducteurs volumiques, on utilisera la relation de Maxwell-Faraday.

On rencontre deux cas dans les exercices :

- Induction de Lorentz : Le champ magnétique ne dépend pas du temps (on dit qu'il est stationnaire) et le circuit est mobile.
- Induction de Neumann : Le champ magnétique dépend du temps et le circuit est fixe.

a) Induction de Lorentz

Le calcul de la fem d'induction peut se faire par deux méthodes. On utilisera la méthode la plus simple dans les exercices.

- **Méthode 1** : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

en notant \vec{v}_e la vitesse d'entraînement du conducteur. La fem d'induction est :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

en faisant attention que \vec{dl} est orienté dans le même sens que le circuit. Il faut faire le tour du circuit.



Interpréter qualitativement le signe de e en utilisant la règle de la main droite et l'orientation de \vec{dl} .

- **Méthode 2** : On calcule le flux du champ magnétique à travers une surface :

$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$. La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

b) Induction de Neumann

Le calcul de la fem d'induction peut se faire par deux méthodes. On utilisera la méthode la plus simple dans les exercices.

- **Méthode 1** : On calcule le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$ avec S une surface qui s'appuie sur le contour orienté. On calcule le fem avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- **Méthode 2** : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On oriente \vec{dl} un vecteur élément de longueur du conducteur dans le même sens que le circuit. La fem d'induction est :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

Interprétation physique

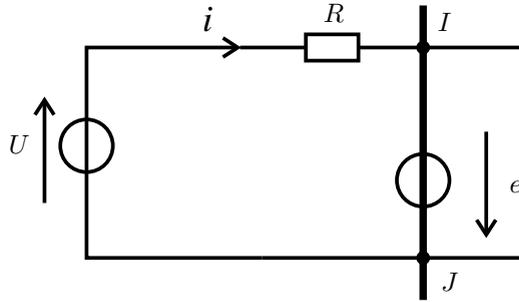
Ne pas oublier d'interpréter physiquement avec la loi de Lenz qui est une loi de modération : **Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.**



1. Équation électrique :

On oriente arbitrairement le circuit.

Comme on a un phénomène d'induction, il faut rajouter en série sur le tronçon IJ une force électromotrice d'induction e en convention générateur. On obtient le schéma électrique :



L'orientation du circuit sert à l'orientation du vecteur \vec{dl} utilisé pour calculer la circulation de \vec{E}_m , à l'orientation du vecteur élément de surface pour le calcul du flux magnétique et dans l'expression de la force de Laplace. Il ne faut pas oublier que e est toujours orienté en convention générateur.



La loi des mailles s'écrit :

$$U = Ri - e$$

Il y a deux méthodes pour calculer la fem d'induction e :

- **Méthode 1** : $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_I^J \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

$d\vec{l}$ est orienté dans le même sens que le circuit. Soit O un point fixe du circuit. Le référentiel absolu $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est galiléen et le référentiel relatif $\mathfrak{R}' = (I; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est non galiléen. La vitesse d'entraînement de la tige est $v\vec{u}_x$.

Pour la tige, on a :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y$$

On en déduit :

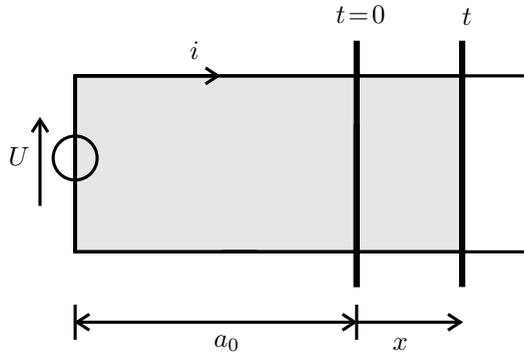
$$e = \int_I^J -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -vB(y_J - y_I)$$

D'où

$$e = vBl$$

- **Méthode 2** : La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Le flux du champ magnétique est défini par :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est orienté avec la règle de la main droite dans le sens de i .

On a donc : $\Phi = -BS$.

Sur le schéma, on a représenté la tige à $t = 0$ et à un instant t . On appelle x le déplacement de la tige. À un instant t , la surface S vaut $\ell(a_0 + x)$. On a donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$



De nombreuses erreurs sont commises avec la circulation du champ électromoteur. La circulation est bien positive car \vec{E}_m et $d\vec{l}$ sont dans le même sens. Il ne faut pas écrire $d\vec{l} = dy\vec{u}_y$ et intégrer entre 0 et ℓ !



Équation mécanique :

Bilan des forces sur la tige :

- Poids appliqué au barycentre G .
- Il n'y a pas de frottement. La réaction du rail en I et J est donc orthogonale au déplacement, c'est-à-dire orthogonal à \vec{u}_x .
- Force de Laplace :

$$\vec{F} = \int_I^J i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_I^J i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = iB [y]_I^J \vec{u}_x = -iB\ell \vec{u}_x$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la tige dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$. On projette sur \vec{u}_x , d'où

$$m\ddot{x} = -i\ell B$$

Équations couplées :

On obtient deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} U = Ri - e = Ri - Bv\ell \\ m\dot{v} = -i\ell B \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$ que l'on réinjecte dans la première équation. On a alors : $U = -R\frac{m\dot{v}}{\ell B} - Bv\ell$, soit

$$\dot{v} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = -\frac{\ell B}{mR}U$$

On définit la constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

Interprétation physique : On a toujours des signes + dans l'équation homogène quelque soit le signe de B . C'est à tout à fait normal puisque la loi de Lenz est une loi de modération. Un terme en B au lieu de B^2 serait aberrant.

La solution de l'équation différentielle est :

$$v = A \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \frac{U}{B\ell}$$

D'après l'énoncé, $v = 0$ pour $t = 0$. On a donc : $0 = A - \frac{U}{B\ell}$

On obtient finalement :

$$v = -\frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

Comme $U = Ri - Bv\ell$, on en déduit l'intensité i :

$$i = \frac{U}{R} + \frac{Bv\ell}{R} = \frac{U}{R} - \frac{B\ell}{R} \frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right) = \frac{U}{R} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Remarque

On peut également en déduire l'intensité à partir de la relation :

$$i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$$



L'intensité i vaut $\frac{U}{R}$ à $t = 0$, ce qui est prévisible puisque la fem d'induction est nulle à $t = 0$. L'intensité décroît et tend vers 0 ce qui est conforme à la loi de Lenz qui est une loi de modération. La cause de l'induction est la tension U qui crée un courant. L'effet de l'induction est de créer une fem e qui annule la tension U et on n'a plus de courant dans le circuit.

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie la loi des mailles par l'intensité i et le théorème de la quantité de mouvement par la vitesse v .

On obtient alors :

$$\begin{cases} Ui = Ri^2 - ei = Ri^2 - Bvli \\ m\frac{dv}{dt} = -i\ell Bv \end{cases}$$

D'où en éliminant le terme de couplage :

$$Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)$$

La puissance fournie par le générateur sert à dissiper de la puissance dans la résistance et à faire varier l'énergie cinétique de la tige.

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$P_{\text{méca}} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -i\ell B\vec{u}_x \cdot v\vec{u}_x = -i\ell Bv$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = Bvli$$

On en déduit que :

$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

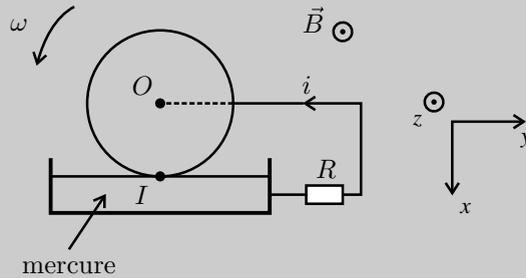
$P_{\text{élec}} = ei = Bvli$ représente algébriquement la puissance fournie par la fem d'induction puisqu'on est en convention générateur. Ici $P_{\text{élec}}$ est négatif. La fem d'induction reçoit donc de l'énergie du circuit électrique. Cette puissance reçue du circuit électrique est donc intégralement transmise à la force de Laplace.

Exercice 10.2 : Roue de Barlow (PC-PSI)

On considère une roue de Barlow constituée d'un disque homogène de centre O , de rayon a et de moment d'inertie J par rapport à son axe horizontal. La liaison pivot est supposée parfaite. On relie la roue à un circuit électrique aux points O et I . La résistance totale du circuit est notée R . Le dispositif est placé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

A $t = 0$, la vitesse angulaire de la roue est ω_0 .

1. Déterminer la vitesse angulaire ω et l'intensité i en fonction du temps.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.



Analyse du problème

La roue est lancée à la vitesse angulaire ω_0 à $t = 0$. On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique stationnaire. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). La cause est la mise en rotation de la roue. On va donc observer un ralentissement de la roue. On peut prévoir qu'au bout d'un certain temps, la roue va finir par s'arrêter.

On utilisera le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ pour calculer la force électromotrice d'induction. Le calcul est beaucoup plus facile qu'avec la loi de Faraday.



1. Équation électrique :

L'orientation du circuit est déjà imposée par le sens du courant.

On néglige l'inductance propre du circuit d'après l'énoncé. Pour tenir compte de l'induction, on rajoute la force électromotrice d'induction e **en convention générateur en série sur la partie OI** .

Remarque : On admet que l'intensité est entièrement concentrée le long du rayon OI . Si on tient compte de la répartition sur la surface de la roue, on peut montrer que l'on obtient le même résultat.

La force électromotrice d'induction est :

$$e = \int_0^I (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

La vitesse d'entraînement d'un point du segment est $x\omega\vec{u}_y$.

On utilise la formule du mouvement circulaire : $r\omega\vec{u}_\theta$.

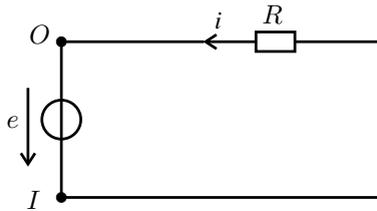


Pour décrire le segment, x varie de 0 à a . Le déplacement élémentaire est : $dx\vec{u}_x$.

On a alors :

$$e = \int_0^a B\omega x \, dx = B\omega \frac{a^2}{2}$$

On obtient le circuit électrique équivalent :



L'équation électrique s'écrit :

$$e = Ri = B\omega \frac{a^2}{2}$$

Équation mécanique :

On va appliquer le théorème de moment cinétique en projection sur l'axe Oz pour le disque en rotation autour d'un axe fixe Oz dans le référentiel lié au laboratoire $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- Le moment de l'action de liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- Les forces de pesanteur sont équivalentes pour un solide à une force unique appliquée en G . Le moment est nul car G est confondu avec le point O .
- Pour calculer le moment des forces de Laplace, on considère un élément \vec{dl} de circuit orienté par le courant i . Le moment élémentaire de la force de Laplace est :

$$\begin{aligned} \vec{d\Gamma} &= \vec{OM} \wedge \vec{dF} = \vec{OM} \wedge (i \vec{dl} \wedge \vec{B}) = x\vec{u}_x \wedge (i dx\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z) \\ &= -i B x dx \vec{u}_z \end{aligned}$$

Il reste à intégrer entre 0 et a (dans le sens de i) :

$$\vec{\Gamma} = - \int_0^a i B x dx \vec{u}_z = -i B \frac{a^2}{2} \vec{u}_z$$

Remarque : On peut remarquer que la résultante des forces de Laplace est équivalente à une force unique appliquée au milieu de $[OI]$ puisque les forces de Laplace sont réparties uniformément sur le segment $[OI]$.



Le théorème du moment cinétique s'écrit en projection sur Oz :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -iB \frac{a^2}{2}$$

On obtient deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} Ri = B\omega \frac{a^2}{2} \\ J \frac{d\omega}{dt} = -iB \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

On obtient en remplaçant le courant dans l'équation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B^2 a^4}{4RJ} \omega = 0$$

On pose :

$$\tau = \frac{4RJ}{B^2 a^4}$$

Interprétation physique : Plus J est grand, plus l'inertie du système est grande. Plus B est grand, plus le système réagit rapidement. C'est tout fait à fait normal d'avoir un terme en B^2 puisque le fait de changer B en $-B$ ne va pas faire diverger le système ! La loi de Lenz est une loi de modération. Plus R est grand, plus la constante de temps est grande. La résolution de l'équation différentielle donne :

$$\omega(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

À $t = 0$, $\omega = \omega_0$. On a donc :

$$\omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Comme $Ri = B\omega \frac{a^2}{2}$, on en déduit :

$$i(t) = \frac{Ba^2\omega_0}{2R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Au bout de quelques τ , l'intensité tend vers zéro et la vitesse angulaire s'anule. C'est bien conforme à loi de Lenz qui est une loi de modération. La cause de l'induction est le mouvement de la roue. L'effet du courant est de créer un couple qui va s'opposer au mouvement de la roue.

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie la loi des mailles par i et le théorème du moment cinétique par ω .

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} ei = B\omega \frac{a^2}{2} i = Ri^2 \\ J \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{d(\frac{1}{2} J \omega^2)}{dt} = -i B \frac{a^2}{2} \omega \end{array} \right.$$

On a donc en éliminant le terme de couplage :

$$-\frac{d(\frac{1}{2} J \omega^2)}{dt} = Ri^2$$

L'énergie cinétique perdue par la tige est reçue par la résistance (cette énergie est en fait dissipée sous forme d'effet Joule).

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$P_{\text{méca}} = \Gamma \omega = -i B \frac{a^2}{2} \omega$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = B\omega \frac{a^2}{2} i$$

On en déduit que :

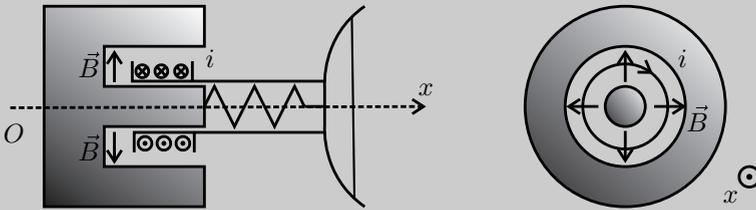
$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

Exercice 10.3 : Haut Parleur (PC-PSI)

On considère un haut-parleur constitué d'un aimant permanent créant un champ magnétique stationnaire radial, d'une membrane solidaire d'une bobine soumise à une tension $u(t)$. La bobine est caractérisée par ℓ la longueur totale de fil, R la résistance et L l'inductance propre. On appelle m la masse du dispositif mobile. Il est relié au bâti par un ressort de constante de raideur k . On appelle x le déplacement du dispositif mobile par rapport à la position d'équilibre et on néglige les frottements solides. Lors de son déplacement dans l'air, la membrane crée une onde acoustique et subit une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$.

1. Déterminer les deux équations différentielles reliant $u(t), i(t)$ et $v(t)$.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.
4. La tension $u(t)$ est de la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé. Exprimer l'impédance du haut-parleur sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_{am}$ dans laquelle \underline{Z}_{am} dépend de B, ℓ, λ, m, k et ω .



Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique stationnaire. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une force électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz).

On utilisera le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ pour calculer la force électromotrice d'induction. Le calcul est beaucoup plus facile qu'avec la loi de Faraday.

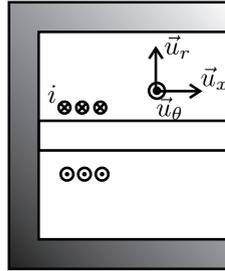


1. On considère la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$ orthonormée directe. Le champ magnétique est $\vec{B} = B\vec{u}_r$.

Équation électrique :

Le champ électromoteur de Lorentz est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \dot{x}\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_r = \dot{x}B\vec{u}_\theta$$



On note a le rayon d'une spire. La circulation du champ électromoteur sur une spire est :

$$\int_{\theta=0}^{-2\pi} \dot{x} B \vec{u}_\theta \cdot (a d\theta) \vec{u}_\theta = -2\pi a \dot{x} B$$



Attention aux erreurs de signes. Il faut intégrer entre 0 et -2π à cause de l'orientation du courant.

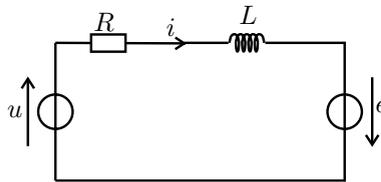


Il reste à multiplier par N le nombre de spires pour en déduire la force électromotrice d'induction. D'après l'énoncé, on a $\ell = N2\pi a$.

On obtient :

$$e = -\dot{x} B \ell$$

Pour tenir compte de l'induction, on rajoute la force électromotrice d'induction e **en convention générateur**. Le schéma électrique équivalent est :



La loi des mailles s'écrit :

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - e = Ri + L \frac{di}{dt} + \dot{x} B \ell$$

Équation mécanique :

Le système étudié est la masse m . Le référentiel terrestre $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est galiléen.

Bilan des forces :

- Force de Laplace élémentaire :

$$\vec{d}f = i \vec{dl} \wedge \vec{B} = ia d\theta \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -ia B d\theta \vec{u}_x$$

On intègre entre 0 et -2π pour déterminer la force de Laplace qui s'exerce sur une spire :

$$\vec{f}_L = i2\pi a B \vec{u}_x$$

On en déduit la force de Laplace qui s'exerce sur les N spires :

$$\vec{f}_L = Ni2\pi a B \vec{u}_x = i\ell B \vec{u}_x$$

- Force exercée par le ressort : $\vec{f}_{\text{ressort}} = -k(L - L_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$.
La longueur à l'équilibre est égale à la longueur à vide L_0 . L'allongement du ressort est x .
- Force de frottement fluide : $\vec{f}_{\text{frot}} = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$

On applique le théorème de la quantité de mouvement en projection sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + i\ell B$$

2. Pour effectuer un bilan de puissance, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\begin{cases} ui = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + B\ell vi \\ m\ddot{x}v = -kxv - \lambda v^2 + i\ell Bv \end{cases}$$

En faisant la différence des équations, on a :

$$ui = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + m\ddot{x}v + kxv + \lambda v^2$$

Soit :

$$ui = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right) + \lambda v^2 + Ri^2$$

La puissance fournie par le générateur sert à faire varier l'énergie magnétique de la bobine et l'énergie mécanique du dispositif mobile, à dissiper de la puissance dans la résistance et par la force de frottement.

Le terme λv^2 est la grandeur utile pour le haut-parleur puisqu'elle crée une onde acoustique.

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$F_L v = i\ell Bv$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$ei = -vB\ell i$$

On en déduit que :

$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

4. On utilise les amplitudes complexes :

$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t) \\ \underline{U} = U_m \end{cases} \text{ et } \begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \\ \underline{I} = I_m \exp(j\phi) \end{cases}$$

Les équations électrique et mécanique s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \underline{V}B\ell \\ mj\omega\underline{V} = -k\frac{\underline{V}}{j\omega} - \lambda\underline{V} + \underline{I}\ell B \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a : $\underline{V} \left(\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) = \underline{I}B\ell$, soit :

$$\underline{V} = \underline{I} \frac{B\ell}{\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$$

En réinjectant dans la première équation, on a :

$$\underline{U} = \left\{ R + jL\omega + \frac{B^2\ell^2}{\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \right\} \underline{I}$$

On pose :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{a,m}$$

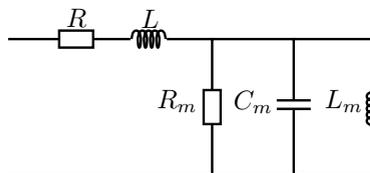
L'impédance du haut-parleur est l'association série de deux impédances :

- Impédance électrique : $\underline{Z}_e = R + jL\omega$
- Impédance acoustico-mécanique ou impédance motionnelle : $\underline{Z}_{a,m}$.

L'admittance motionnelle est :

$$\underline{Y}_{a,m} = \frac{1}{\underline{Z}_{a,m}} = \frac{\lambda}{B^2\ell^2} + \frac{j\omega m}{B^2\ell^2} + \frac{k}{j\omega B^2\ell^2} = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$

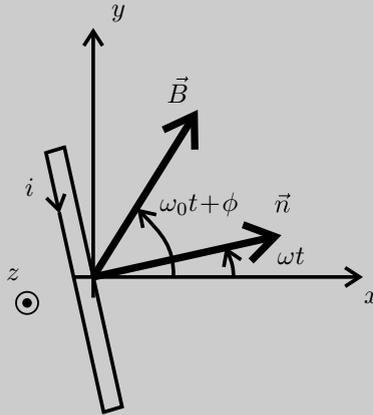
On a alors le schéma électrique équivalent :



Le comportement électrique du haut-parleur dépend donc de la fréquence. Dans la pratique, on utilise plusieurs haut-parleurs suivant les gammes de fréquence.

Exercice 10.4 : Moteur asynchrone (PC-PSI)

Une bobine plate fermée sur elle-même, de surface totale S , de résistance R et d'inductance L est mobile autour d'un axe Δ . Elle est placée dans un champ magnétique uniforme, de module constant B , tournant autour du même axe à la vitesse angulaire constante ω_0 . La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse angulaire ω . On suppose qu'un régime permanent est atteint pour lequel la bobine tourne à une vitesse angulaire constante avec un retard de phase initial ϕ sur le champ tournant. On pose $\Omega = \omega_0 - \omega$.



1. Déterminer le courant $i(t)$ dans la bobine après amortissement du régime transitoire en précisant sa valeur efficace et son retard de phase ψ sur la force électromotrice d'induction.
2. Donner les expressions du couple instantané Γ et du couple moyen C agissant sur la bobine. Étudier les variations de C en fonction de ω . Calculer sa valeur C_0 pour $\omega = 0$, sa valeur maximale C_m et la valeur ω_m correspondante. Dans quelles conditions a-t-on un fonctionnement moteur ?
3. Dans quelles conditions le fonctionnement moteur est-il stable ? Le moteur peut-il démarrer seul ?

Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique dépendant du temps. On a un phénomène d'induction avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). On utilise la loi de Faraday pour calculer la fem d'induction. Cette méthode est à privilégier dans le cas d'une spire en rotation.



1. L'angle entre le vecteur normal à la bobine et le champ magnétique vaut :

$$(\vec{n}, \vec{B}) = \omega_0 t + \phi - \omega t$$

On a un phénomène d'induction avec un circuit mobile et un champ magnétique dépendant du temps. La force électromotrice d'induction s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos ((\omega_0 - \omega) t + \phi)$$

Remarque : La bobine de rayon R est constituée de N spires. La surface totale vaut alors :

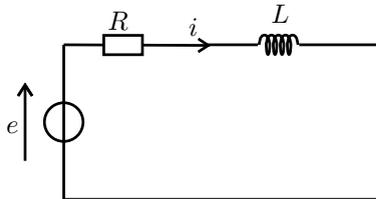
$$S = N\pi R^2$$



D'où

$$e = (\omega_0 - \omega) BS \sin ((\omega_0 - \omega) t + \phi) = BS\Omega \sin (\Omega t + \phi)$$

L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

On travaille en régime sinusoïdal forcé. On utilise la notation complexe, ce qui revient à remplacer $\sin ()$ par $\exp (j ())$.

D'après l'énoncé, on appelle ψ le retard de phase de i sur e . On a donc :

$$\begin{cases} i(t) = I_m \sin (\Omega t + \phi - \psi) \\ \underline{i} = I_m \exp (j (\Omega t + \phi - \psi)) \end{cases}$$

En notation complexe, la loi des mailles s'écrit :

$$(R + jL\Omega) \underline{i} = BS\Omega \exp(j(\Omega t + \phi))$$

D'où :

$$\underline{i} = \frac{BS\Omega}{R + jL\Omega} \exp(j(\Omega t + \phi))$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \\ \arg(\underline{i}) = \Omega t + \phi - \psi = \Omega t + \phi - \arg(R + jL\Omega) \end{cases}$$

soit :

$$\psi = \arg(R + jL\Omega)$$

On a donc :

$$I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} ; \tan \psi = \frac{L\Omega}{R} \text{ et } \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} > 0$$

Interprétation physique : L'angle ψ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. i est toujours en retard de phase sur e . C'est normal, puisqu'on a un circuit inductif.

2. Le moment des forces de Laplace est : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.
 $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à \vec{u}_z . On écrit par la suite : $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$.



Il faut utiliser la notation réelle car on a le produit de deux fonctions sinusoïdales.



$$\Gamma = MB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t) \text{ avec } M = iS.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Gamma &= iSB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t) \\ &= BS \sin(\Omega t + \phi) \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi - \psi) \end{aligned}$$

Or $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (-\cos(a+b) + \cos(a-b))$. On a donc :

$$\Gamma = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \{-\cos(2\Omega t + 2\phi - \psi) + \cos(\psi)\}$$

La valeur moyenne du couple vaut donc :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \cos(\psi)$$

On a vu que $\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$. D'où :

$$C = \langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega R}{2(R^2 + L^2 \Omega^2)}$$

On a un couple moteur si $\Omega > 0$, c'est-à-dire $\omega_0 > \omega$.

Pour étudier la courbe de C en fonction de ω , il faut calculer la dérivée de C par rapport à ω . On pose :

$$f(\omega) = \frac{\omega_0 - \omega}{1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}}$$

La dérivée de f par rapport à ω est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}\right) - (\omega_0 - \omega) \left(\frac{-2L^2}{R^2}(\omega_0 - \omega)\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2} &= (\omega_0 - \omega)^2 \frac{2L^2}{R^2} \Leftrightarrow (\omega_0 - \omega)^2 \frac{L^2}{R^2} = 1 \\ \Leftrightarrow \omega - \omega_0 &= \pm \frac{R}{L} \end{aligned}$$

La valeur minimale est obtenue pour $\omega = \omega_0 + \frac{R}{L}$. La valeur maximale est

obtenue pour $\omega = \omega_0 - \frac{R}{L}$. La valeur maximale du couple est :

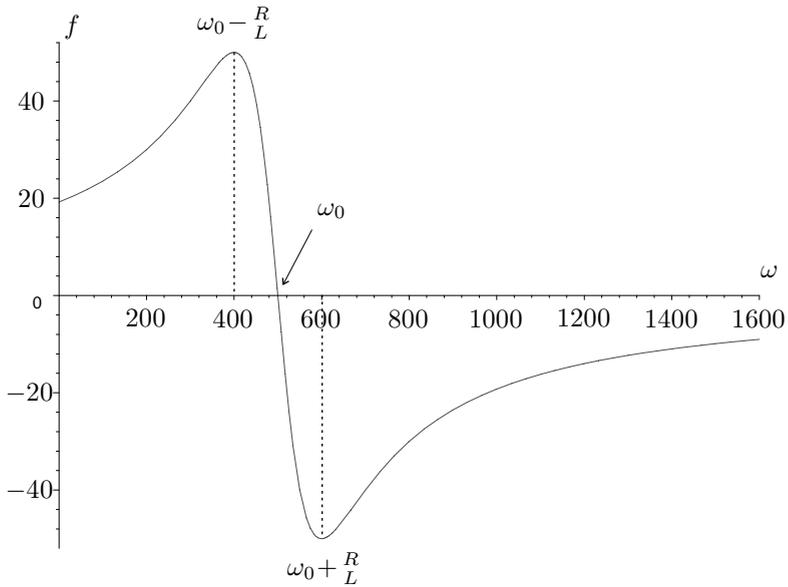
$$C_m = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\frac{R}{L}}{1 + \frac{L^2(\frac{R}{L})^2}{R^2}} = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{R}{2}$$

D'où :

$$C_m = \frac{B^2 S^2}{4L}$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow 0, C = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\omega_0}{1 + \frac{L^2 \omega_0^2}{R^2}} = C_0.$$

On en déduit la courbe représentant f en fonction de ω .



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



Interprétation physique

On a un fonctionnement moteur si $0 \leq \omega < \omega_0$.

La vitesse de rotation du rotor (bobine) est inférieure à celle du champ tournant.

En régime permanent, on a en moyenne :

$$0 = \langle \Gamma \rangle + \langle \Gamma_r \rangle$$

soit $0 = C + C_r$ en appelant C_r le couple moyen résistant avec $C_r < 0$.

3. Supposons qu'à cause d'une perturbation, $|C_r|$ augmente, la bobine est freinée, donc ω diminue.

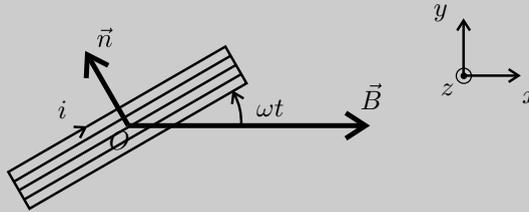
D'après la courbe :

- Si $\omega_0 - \frac{R}{L} < \omega < \omega_0$, C augmente, ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc stable.
- Si $0 < \omega < \omega_0 - \frac{R}{L}$, C diminue, ce qui a pour effet de diminuer la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc instable.

Le moteur asynchrone peut démarrer seul à condition que le couple de frottement en valeur absolue soit inférieur à C_0 . Les T.G.V. Eurostar et Thalys sont équipés de moteurs asynchrones.

Exercice 10.5 : Alternateur d'une éolienne (PC-PSI)

Le disque éolien entraîne, par un système de démultiplication, une bobine plate en rotation autour de l'axe Oz . La bobine a une résistance r , une inductance L et elle est fermée sur une résistance R_0 . On pose $R = r + R_0$. Elle comporte N spires de surface s et se déplace dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$.



1. L'éolienne tourne à vitesse angulaire constante ω . En régime sinusoïdal forcé, l'intensité i est de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Déterminer I_m et ϕ .
2. Quelle est la valeur moyenne du moment $\vec{\Gamma}'$ des forces de Laplace subi par la bobine ?
3. Le moteur éolien a une puissance moyenne P . Représenter, sur un même diagramme, le moment $\|\vec{\Gamma}\|$ du couple moteur et $\|\langle \vec{\Gamma}' \rangle\|$, en fonction de ω .
4. A $t = 0$, la vitesse angulaire est nulle et on débloque l'éolienne. Analyser qualitativement le régime transitoire. Déterminer la vitesse angulaire ω_0 en régime permanent et montrer que P doit rester inférieure à une puissance critique notée P_c . Ce régime est-il stable ?

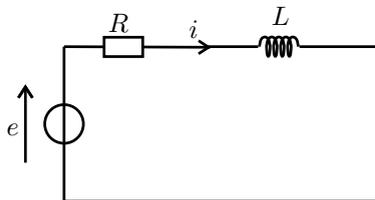
Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique constant. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz).

Il y a deux méthodes pour calculer la fem : utilisation du champ électromoteur ou la loi de Faraday. Ici, c'est beaucoup plus simple d'utiliser la loi de Faraday.



1. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = N B s \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -N B s \sin (\omega t)$$

car la surface est orientée avec la règle de la main droite : $\vec{dS} = dS \vec{n}$.
La fem vaut donc :

$$e = N s B \omega \cos (\omega t)$$

La loi des mailles s'écrit :

$$e = R i + L \frac{di}{dt}$$

avec $\begin{cases} i = I_m \cos (\omega t + \phi) \\ \dot{i} = I_m \exp (j (\omega t + \phi)) \end{cases}$ et $\begin{cases} e = N s B \omega \cos (\omega t) \\ \underline{e} = N s B \omega \exp (j (\omega t)) \end{cases}$

En notation complexe, on a : $\underline{e} = R \underline{i} + j L \omega \underline{i}$, d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j L \omega} = \frac{N s B \omega \exp (j (\omega t))}{R + j L \omega}$$

On en déduit : $\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{N s B \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \arg (\underline{i}) = \omega t + \phi = \omega t - \arg (R + j L \omega) \end{cases}$

D'où :

$$I_m = \frac{N s B \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} ; \tan \phi = -\frac{L \omega}{R} \text{ et } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} > 0$$

ϕ est donc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0.

2. Le moment magnétique de la bobine est $\vec{M} = N I s \vec{n}$.

Le moment du couple subi par la bobine est : $\vec{\Gamma}' = \vec{M} \wedge \vec{B} = N I s \vec{n} \wedge B \vec{u}_x$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin (\omega t) \\ \cos (\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ en projection sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = N I s B \begin{vmatrix} -\sin (\omega t) \\ \cos (\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -N I s B \cos (\omega t) \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma}' = -NI_m s B \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Or $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$.

On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = -\frac{NI_m s B}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \vec{u}_z$$

La moyenne du moment du couple est :

$$\langle \vec{\Gamma}' \rangle = -\frac{NI_m s B}{2} \cos \phi \vec{u}_z$$

La projection du moment du couple est négative. C'est normal d'après la loi de Lenz qui est une loi de modération. La création d'un courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui donnent naissance. La cause est la rotation de la bobine.

3. Soit P la puissance du couple moteur. On a : $P = \Gamma \omega$. La puissance est constante, donc

$$\Gamma = \frac{P}{\omega}$$

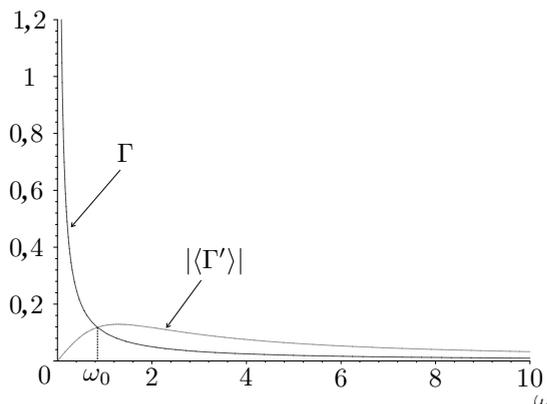
On a vu que :

$$\langle \Gamma' \rangle = -\frac{NI_m s B}{2} \cos \phi = -\frac{NsB}{2} \left(\frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right)$$

D'où

$$\langle \Gamma' \rangle = \frac{-N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

Le graphe ci-dessous représente l'allure de Γ et de $|\langle \Gamma' \rangle|$ en fonction de ω . Le point de fonctionnement est l'intersection des deux courbes.



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



4. A $t = 0$, on débloque l'éolienne. La vitesse angulaire ω augmente car $J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma' > 0$, le couple de frottement augmente et le couple moteur diminue. On atteint un régime permanent pour $\omega = \omega_0$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma + \Gamma'$$

On doit avoir : $|\langle \Gamma' \rangle| = \Gamma$, soit :

$$\frac{P}{\omega_0} = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2}$$

D'où $2P (R^2 + L^2 \omega_0^2) = N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2$. On a alors :

$$R^2 + L^2 \omega_0^2 = \frac{N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2}{2P}$$

Soit :

$$\omega_0^2 = \frac{R^2}{\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2}$$

Pour que ω_0 soit défini, il faut que $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2 > 0$, c'est-à-dire $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} > L^2$, soit $P < \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$. On pose :

$$P_c = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$$

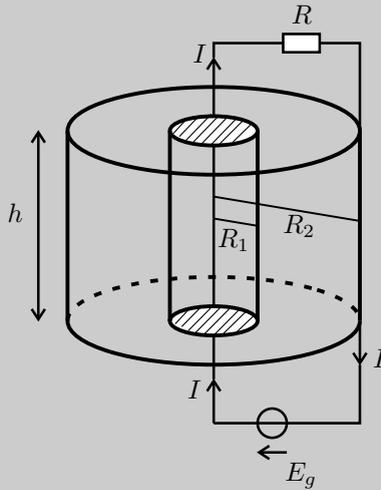
On doit donc avoir :

$$P < P_c$$

Si la vitesse angulaire augmente légèrement, le couple moteur est inférieur au couple résistant en norme. On a donc un ralentissement de la bobine. Le régime est donc stable.

Exercice 10.6 : Énergie magnétique du câble coaxial (PC-PSI)

On considère un câble coaxial formé d'un conducteur cylindrique plein, de rayon R_1 , de longueur h , d'axe Oz , entouré d'un conducteur cylindrique creux, de rayon intérieur R_2 et d'épaisseur e . Le conducteur intérieur est parcouru par un courant volumique $\vec{j}_1 = j_1 \vec{u}_z$ et le conducteur extérieur est parcouru par un courant volumique $\vec{j}_2 = j_2 \vec{u}_z$. On note I l'intensité du courant électrique permanent dans le conducteur intérieur. On néglige les effets de bord et la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme (région $r < R_1$) et celle localisée dans la gaine (région $R_2 < r < R_2 + e$) du câble coaxial.



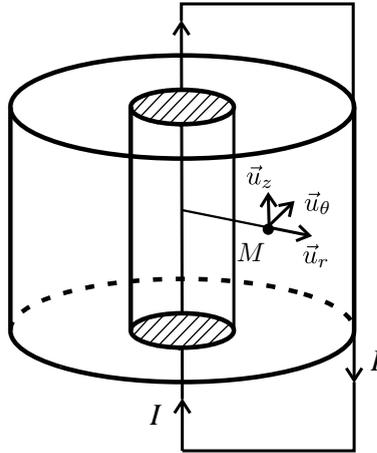
1. Déterminer le champ magnétique en tout point $M(r, \theta, z)$ de l'espace en fonction de I, R_1, R_2, e et r .
2. Déterminer l'énergie magnétique emmagasinée et en déduire l'inductance propre du câble coaxial en fonction de h, R_1, R_2 et e .

Analyse du problème

On utilise les symétries et invariances pour déterminer la structure du champ magnétique. Le théorème d'Ampère permet de calculer le champ magnétique dans tout l'espace. Le calcul de l'énergie magnétique permet d'en déduire l'inductance propre du câble coaxial.



1.



- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courants qui est la source du champ magnétique, $\vec{B} \perp P$, donc $\vec{B} // \vec{u}_\theta$.
- La distribution est invariante par rotation d'angle θ , et par translation suivant \vec{u}_z (on néglige les effets de bord), donc les coordonnées de \vec{B} ne dépendent pas de θ et de z .

On obtient finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

On a des courants volumiques de densité uniforme. D'après les orientations, on a :

$$I = j_1 \pi R_1^2 \text{ et } -I = j_2 \pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle passant par M de rayon r orienté suivant \vec{u}_θ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si $r < R_1$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

- Si $R_1 \leq r \leq R_2$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi R_1^2 = \mu_0 I$, donc

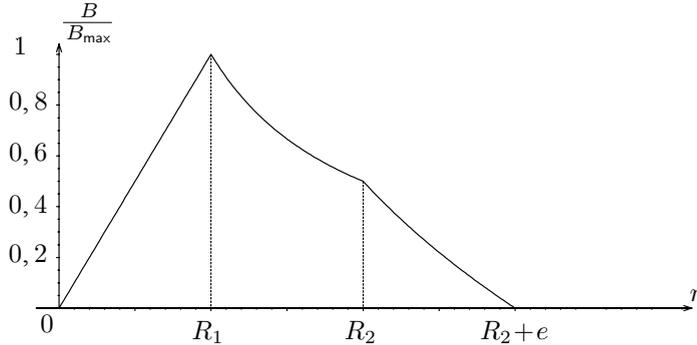
$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Si $R_2 < r < R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2\pi (r^2 - R_2^2))$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 (I + j_2\pi (r^2 - R_2^2))}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I (r^2 - R_2^2)}{2r\pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)}$$

- Si $r > R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2\pi R_2^2) = \mu_0 (I - I) = 0$, donc

$$B(r) = 0$$



On n'observe pas de discontinuité à la traversée des cylindres car on a des distributions volumiques de courants.

2. La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial est :

$$W_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

D'après l'énoncé, on néglige la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme et dans la gaine. On a donc :

$$W_m = \iiint_{\substack{R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{1}{2\mu_0} (dr) (r d\theta) (dz) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) I^2$$

L'inductance propre L du câble coaxial est définie par :

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

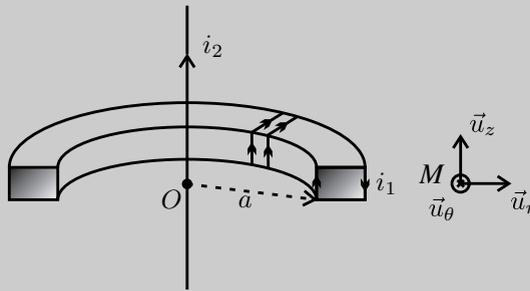
On en déduit :

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Exercice 10.7 : Pince ampèremétrique (PC-PSI)

Une bobine torique est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , de hauteur h . On suppose que $N \gg 1$.

1. Calculer le flux du champ magnétique créé par la bobine torique à travers les N spires. En déduire son inductance propre L_1 .
2. Le tore (circuit 1) enlace un fil infini (circuit 2) d'axe Oz et est parcouru par un courant $i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \phi)$. Calculer le flux du champ magnétique créé par le circuit 2 à travers les N spires du tore. En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.
3. On court-circuite le circuit torique et on néglige sa résistance. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminer la valeur efficace du courant i_1 . Quel est l'avantage de la mesure du courant induit ?

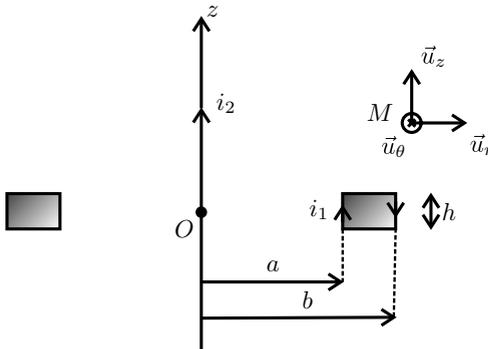


Analyse du problème

On a un problème d'induction avec deux circuits couplés. On commence par calculer l'inductance propre et l'inductance mutuelle entre les deux circuits. Le circuit 2 crée un champ magnétique variable. On a un phénomène d'induction à cause de la variation du flux magnétique à travers le circuit 1. Le flux magnétique est la somme du flux propre et du flux extérieur. En utilisant la notation complexe, on pourra en déduire la valeur efficace du courant i_1 .



1.



Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources du champ, donc $\vec{B}_1(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_1(M) // \vec{u}_\theta$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B}_1 aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ . D'où :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r, z) \vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz, de rayon r passant par M :

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si M est à l'intérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = N i_1$ en appliquant la règle de la main droite. On en déduit :

$$\vec{B}_{1 \text{ int}} = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Si M est à l'extérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = 0$. On a donc :

$$\vec{B}_{1 \text{ ext}} = \vec{0}$$

Le flux à travers une spire est :

$$\Phi_{\text{spire}} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 N i_1 h}{2\pi} \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

La spire est orientée avec la règle de la main droite.

Le flux à travers les N spires de la bobine torique vaut :

$$\Phi_P = N \Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est appelé flux propre. On peut l'identifier à $\Phi_P = L_1 i_1$, d'où :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

2. On appelle $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux extérieur, c'est-à-dire le flux du champ magnétique \vec{B}_2 créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 :

$$\Phi_{\text{ext}} = \Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{\text{spires de } C_1} \int \int_{M \in \text{spire}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

On va calculer le champ magnétique créé par le circuit 2 :

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}_2(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_2(M) // \vec{u}_\theta$.
- La distribution D est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{B}_2 aussi. On a donc :

$$\vec{B}_2 = B_2(r) \vec{u}_\theta$$

- On applique le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère est un cercle orienté suivant \vec{u}_θ passant par M et de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B_2(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_2(r) 2\pi r = \oplus \mu_0 i_2$$

On a donc :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers une spire du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1(1 \text{ spire})} = \iint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers les N spires du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \Phi_{2 \rightarrow 1(1 \text{ spire})} = \frac{\mu_0 N i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

On pose $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$, d'où :

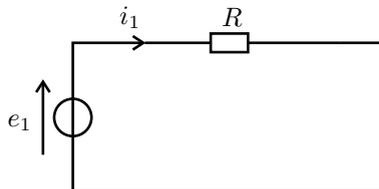
$$M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Remarque

Si on change le sens de i_1 ou i_2 , M change de signe.



3. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La force électromotrice d'induction est :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 est :

$$\Phi_1 = \Phi_P + \Phi_{\text{ext}} = L_1 i_1 + M i_2$$



Une erreur fréquente est de ne pas tenir compte du flux propre. Ici, le flux propre dépend de N^2 alors que le flux extérieur dépend de N . Comme N est très grand, il n'y a aucune raison de le négliger.



La loi des mailles s'écrit :

$$e_1 = R i_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Comme la résistance est négligeable d'après l'énoncé, on a :

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

En utilisant la notation complexe, on a : $jL\omega i_1 = -jM\omega i_2$.

On en déduit une relation faisant intervenir les intensités efficaces :

$$L\omega I_{1\text{eff}} = M\omega I_{2\text{eff}}.$$

Comme $\frac{L}{M} = N$, on a :

$$I_{1\text{eff}} = \frac{M}{L} I_{2\text{eff}} = \frac{I_{2\text{eff}}}{N}$$

Une pince ampèremétrique permet donc de mesurer des forts courants (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers d'ampères).

Partie 5

Conversion de puissance

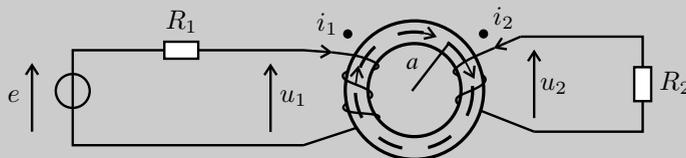
Plan

11. Conversion électromagnétique statique	225
11.1 : Transformateur torique (PC-PSI)	225
11.2 : Cycle d'Hystérésis (PSI)	230
12. Conversion électromagnétique	237
12.1 : Champ magnétique tournant (PSI)	237
12.2 : Machine à courant continu (PSI)	240
13. Conversion électronique	245
13.1 : Hacheur à stockage inductif (PSI)	245
13.2 : Hacheur à stockage capacitif (PSI)	249

Conversion électromagnétique statique

Exercice 11.1 : Transformateur torique (PC-PSI)

Sur un tore magnétique, on dispose deux enroulements. Le primaire est constitué de N_1 spires, et relié à un générateur de force électromotrice $e(t)$ par l'intermédiaire d'une résistance R_1 . Le secondaire comprend N_2 spires, il est branché sur une résistance R_2 . Les résistances des enroulements sont nulles. Le tore est constitué d'un matériau de perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$ (μ_r très grand devant l'unité). Sa section est notée S . Son rayon a est grand devant le rayon b de la section S .



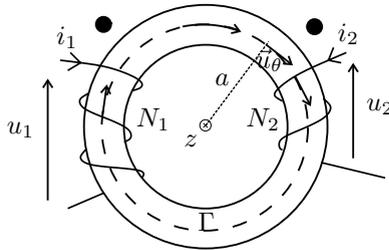
1. Montrer qualitativement que l'on néglige les variations du champ magnétique à l'intérieur du tore. Donner la forme des lignes de champ dans le matériau. Déterminer le champ magnétique dans le tore. Définir les bornes homologues.
2. Établir les expressions des flux Φ_1 et Φ_2 , traversant respectivement le primaire et le secondaire.
3. Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M existant entre les deux circuits, ainsi que leurs inductances propres respectives L_1 et L_2 , en fonction de $L_0 = \frac{\mu_0\mu_r S}{2\pi a}$. Quelle relation existe entre M, L_1 et L_2 ?
4. On étudie le cas où $e(t)$ est un échelon défini par : $e(t) = 0$ pour $t < 0$; $e(t) = E$ pour $t > 0$. Établir les équations différentielles liant i_2 et e d'une part, i_1 et e d'autre part.
5. Pour $t < 0$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont nuls. Quelles grandeurs physiques restent continues en $t = 0$? En déduire une relation entre $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un transformateur torique. Il faut faire attention aux signes lors de l'application du théorème d'Ampère. C'est un problème d'induction puisqu'on a une variation du flux magnétique. Il faut donc rajouter les fem d'induction en convention générateur dans le circuit électrique équivalent.



1. On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

On ne peut pas utiliser les plans de symétrie et l'invariance par rotation à cause des N_1 et N_2 spires.

Dans le cas d'un matériau de grande perméabilité, il y a canalisation des lignes de champ. Celles-ci restent à l'intérieur du circuit magnétique. On a alors : $\vec{B} // \vec{u}_\theta$.

Comme $b \ll a$, alors le champ magnétique est constant à l'intérieur du tore.

Le champ magnétique est de la forme : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.

Les lignes de champ sont des cercles de rayon r .

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu I_{\text{enlacé}} = \mu (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$



Attention aux signes pour la circulation du champ magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.



On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{2\pi r} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta \approx \frac{\mu}{2\pi a} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta$$

Définition des bornes homologues : Des courants entrant par les bornes homologues créent des champs magnétiques de même sens dans le circuit. Les bornes homologues sont représentées sur le schéma ci-dessous.

2. Le flux à travers une spire orientée est :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = BS$$

puisque le champ magnétique ne dépend pas de r .
Le flux qui traverse les N_1 spires orientées est :

$$\Phi_1 = N_1 (BS)$$

Le flux qui traverse les N_2 spires orientées est :

$$\Phi_2 = N_2 (BS)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi a} i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

3. On pose $L_0 = \frac{\mu S}{2\pi a}$. On a alors :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_0 N_1^2 i_1 + L_0 N_1 N_2 i_2 \\ \Phi_2 = L_0 N_1 N_2 i_1 + L_0 N_2^2 i_2 \end{cases}$$

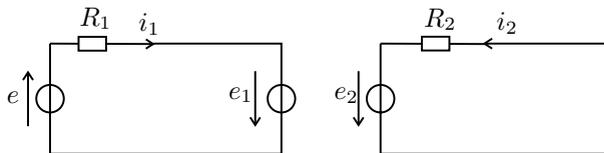
On a donc : $L_1 = L_0 N_1^2$ et $L_2 = L_0 N_2^2$.

On vérifie que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Le couplage magnétique entre le primaire et le secondaire est parfait, toutes les lignes du champ magnétique créé par l'un des deux circuits traversent l'autre circuit :

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = L_0 N_1 N_2$$

4.



Il faut bien orienter les fem d'induction en convention générateur.

La loi des mailles permet d'écrire :

$$\begin{cases} e + e_1 = R_1 i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{éq.1}) \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (\text{éq.2}) \end{cases}$$

a) Pour lever le couplage, on dérive l'équation (1) et on utilise l'équation (2) pour éliminer i_1 .

L'équation (1) devient : $\frac{de}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$.

L'équation (2) s'écrit : $\frac{di_1}{dt} = \frac{-(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt})}{M}$.

On réinjecte dans (1) :

$$\frac{de}{dt} = -R_1 \frac{(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt})}{M} + L_1 \frac{-(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2})}{M} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

D'où

$$\frac{de}{dt} = \frac{-R_1 R_2}{M} i_2 - \frac{R_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2 L_1}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{L_1 L_2}{M} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

Or $M^2 = L_1 L_2$. On a donc :

On en déduit :

$$-\frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{1}{M} (R_1 L_2 + R_2 L_1) \quad (\text{éq.1'})$$

b) On dérive l'équation (2) et on utilise l'équation (1) pour éliminer i_2 .

L'équation (2) devient : $0 = R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$

L'équation (1) s'écrit : $\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right)$

On réinjecte dans (2) :

$$0 = \frac{R_2}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{L_2}{M} \left(\frac{de}{dt} - R_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

D'où :

$$\frac{R_2}{M}e + \frac{L_2}{M} \frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + \frac{R_2 L_1 + R_1 L_2}{M} \frac{di_1}{dt} \quad (\text{éq.2'})$$

car $M^2 = L_1 L_2$.

On a vu que $L_1 = L_0 N_1^2$; $L_2 = L_0 N_2^2$ et $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Si $e(t) = E$, l'équation (1') s'écrit :

$$0 = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{L_0}{M} (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2), \text{ soit :}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau} = 0$$

$$\text{avec } \tau = L_0 \frac{R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2}{R_1 R_2}.$$

L'équation (2') s'écrit alors : $\frac{R_2}{M} E = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + L_0 \frac{R_2 N_1^2 + R_1 N_2^2}{M} \frac{di_1}{dt}$,
soit :

$$\tau \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{E}{R_1}$$

5. On a rajouté une fem d'induction $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ dans le circuit n°1 et une fem d'induction $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ dans le circuit n°2. Φ_1 et Φ_2 ne peuvent pas varier de façon discontinue, sinon on aurait des fem e_1 et e_2 infinies.



Il est faux ici de dire que $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Il faut raisonner sur le flux et non pas sur les courants.



$\Phi_1(0^+) = \Phi_1(0^-) = 0$, donc $B(0) = 0$ et d'après le théorème d'Ampère :

$$N_1 i_1(0^+) + N_2 i_2(0^+) = 0 \quad (\text{éq. 3})$$

On utilise les équations (1) et (2) à $t = 0$:

$$\begin{cases} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + L_0 N_1^2 \frac{di_1}{dt} + L_0 N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_0 N_2^2 \frac{di_2}{dt} + L_0 N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{e - R_1 i_1}{N_1} = L_0 N_1 \frac{di_1}{dt} + L_0 N_2 \frac{di_2}{dt} \\ \frac{-R_2 i_2}{N_2} = L_0 N_2 \frac{di_2}{dt} + L_0 N_1 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Les deux termes de droite sont égaux.

On en déduit donc qu'à $t = 0$: $\frac{E - R_1 i_1}{N_1} = \frac{-R_2 i_2}{N_2}$, soit :

$$E = R_1 i_1 (0^+) - \frac{N_1}{N_2} R_2 i_2 (0^+) \quad (\text{éq. 4})$$

On donc les équations (3) et (4) permettant d'obtenir $i_1 (0^+)$ et $i_2 (0^+)$.

$i_2 (0^+) = \frac{-N_1}{N_2} i_1 (0^+)$, d'où :

$$E = R_1 i_1 (0^+) + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 i_1 (0^+) = \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 i_1 (0^+) \left(1 + \frac{R_1 N_2^2}{R_2 N_1^2} \right)$$

On a alors :

$$i_1 (0^+) = \frac{E}{R_2} \frac{N_2^2}{N_1^2} \alpha$$

en posant $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{R_1 N_2^2}{R_2 N_1^2}}$.

On obtient : $i_2 (0^+) = \frac{-N_1}{N_2} i_1 (0^+) = \frac{E}{R_2} \left(\frac{-N_1}{N_2} \right) \frac{N_2^2}{N_1^2} \alpha$. On en déduit

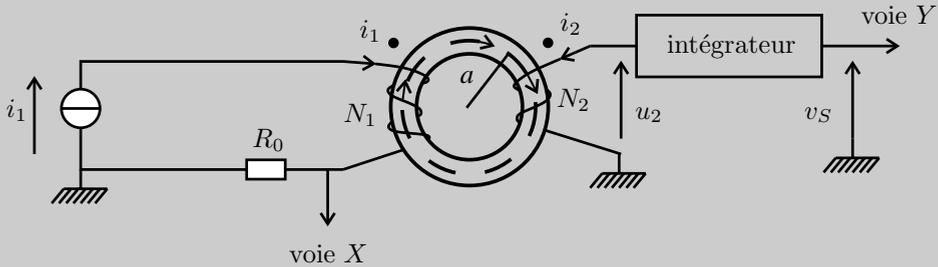
finalement :

$$i_2 (0^+) = \frac{-N_2}{N_1} \frac{E}{R_2} \alpha$$

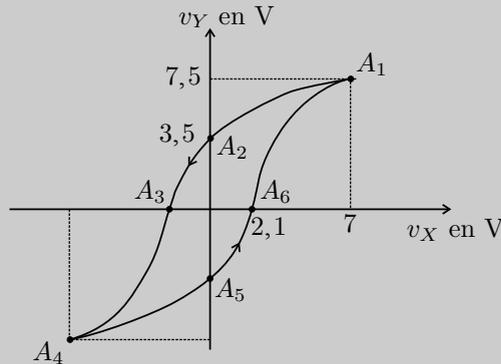
Exercice 11.2 : Cycle d'Hystérésis (PSI)

On désire tracer expérimentalement le cycle d'Hystérésis $B = f(H)$ d'un matériau se présentant sous la forme d'un tore sur lequel sont bobinés deux enroulements. L'enroulement primaire contient N_1 spires et l'enroulement secondaire contient N_2 spires. On note a son rayon moyen et S sa section. Dans les conditions expérimentales, $N_2 i_2 \ll N_1 i_1$. On ne tiendra pas compte de la résistance des

enroulements. H et B sont supposés uniformes dans le tore. On donne $R_0 = 1,0 \text{ k}\Omega$.



- Déterminer la relation entre H et i_1 . Montrer que la tension v_X sur la voie X peut se mettre sous la forme : $v_X = K_1 H$. Déterminer K_1 .
- Proposer un montage avec des amplificateurs opérationnels permettant d'avoir $i_2 = 0$ et de réaliser la fonction intégration. On suppose qu'à $t = 0$, $v_Y = 0$ et $B = 0$. Montrer que la tension v_Y sur la voie Y peut se mettre sous la forme : $v_Y = K_2 B$. Déterminer K_2 .
- On observe sur l'oscilloscope la courbe suivante :



Le point A_1 correspond au champ magnétique à saturation. Interpréter la courbe et les deux points A_2 et A_6 . Que représente la surface du cycle ? Les composants donnent $K_1 = 0,03 \text{ S.I.}$ et $K_2 = 5,0 \text{ S.I.}$

Déterminer les valeurs numériques des points.

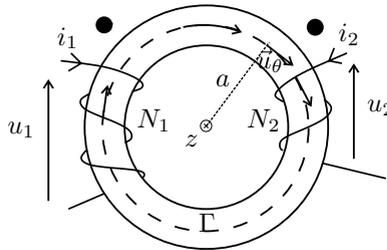
- Déterminer la puissance moyenne fournie par le circuit primaire au matériau ferromagnétique. Interpréter avec l'aire du cycle d'hystérésis.
- La ferrite présente un cycle de surface inférieure à celle du fer ainsi qu'un champ rémanent plus faible. Quel est parmi ces deux matériaux celui qui est le mieux adapté à la réalisation : d'un transformateur ? d'un aimant permanent ?

Analyse du problème

Cet exercice permet de tracer expérimentalement le cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique. C'est un exercice d'induction. On travaille donc sur le schéma électrique équivalent en rajoutant les forces électromotrices d'induction en convention générateur. Le bilan énergétique permet d'interpréter les pertes fer.



1. On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

Dans le cas d'un matériau de grande perméabilité, il y a canalisation des lignes de champ. On suppose d'après l'énoncé que l'excitation magnétique H est uniforme dans le tore. \vec{H} est donc de la forme :

$$\vec{H} = H\vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H2\pi r = I_{\text{enlacé}} = N_1 i_1 + N_2 i_2$$



Attention aux signes pour la circulation de l'excitation magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.



D'après l'énoncé, on néglige $N_2 i_2$ devant $N_1 i_1$. On a alors :

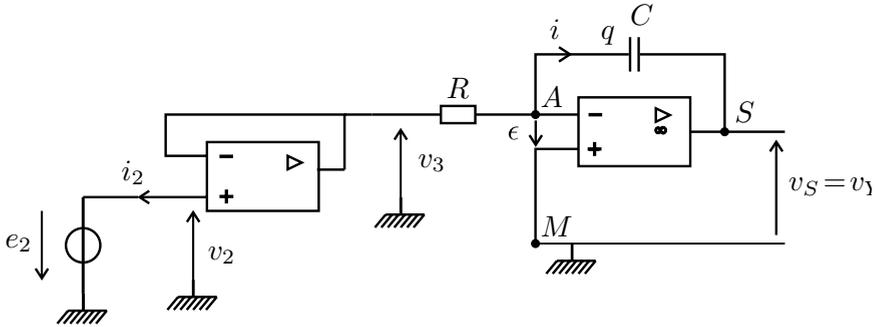
$$\vec{H} \approx \frac{N_1 i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta \approx \frac{N_1 i_1}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$

On a donc : $v_X = R_0 i_1 = \frac{2\pi a R_0}{N_1} H = K_1 H$ avec

$$K_1 = \frac{2\pi a R_0}{N_1}$$

2. Schéma électrique équivalent :

Pour avoir $i_2 = 0$, il faut insérer un montage suiveur entre le circuit secondaire et l'intégrateur. On a alors $u_3 = u_2$ avec $i_2 = 0$.



Il faut bien orienter la force électromotrice d'induction en convention générateur.



Force électromotrice d'induction :

La force électromotrice d'induction est $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$.

Le flux à travers une spire du circuit 2 orienté dans le sens horaire est

$$\varphi_2 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS.$$

Le flux du champ magnétique à travers la bobine 2 est :

$\Phi_2 = N_2\varphi_2 = N_2BS$. On en déduit :

$$u_3 = u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2S \frac{dB}{dt}$$

Étude du montage intégrateur :

On a deux inconnues : v_A et v_Y . Il faut donc deux équations :

- Loi des noeuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{u_3 - v_A}{R} - i = 0$$

Il faut relier l'intensité i à la tension de sortie v_Y . Soit q la charge du

condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C(v_A - v_Y)$.

- Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\epsilon = 0 - v_A = 0$.

On a donc :

$$\frac{u_3}{R} + C \frac{dv_Y}{dt} = 0$$

On obtient finalement :

$$v_Y(t) - v_Y(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_3(t') dt'$$

On a donc un montage intégrateur. L'AO doit rester en régime linéaire pour fonctionner en intégrateur.

Relation entre v_S et le champ magnétique :

La tension de sortie est donnée par :

$$v_Y(t) - v_Y(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t N_2 S \frac{dB}{dt} dt = -\frac{N_2 S}{RC} (B(t) - B(0))$$

Pour $t = 0$, $v_Y = 0$ et $B = 0$. On a donc :

$$v_Y = -\frac{N_2 S}{RC} B(t)$$

On a alors : $v_Y = K_2 B$ avec

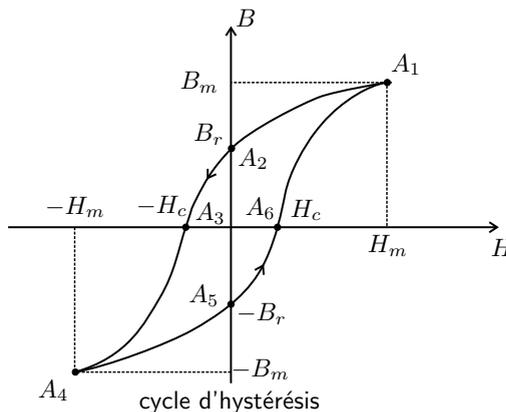
$$K_2 = -\frac{N_2 S}{RC}$$

On peut donc observer sur l'oscilloscope v_Y en fonction de v_X , c'est-à-dire B en fonction de H .

3. On observe un cycle d'hystérésis : l'aimantation et la désaimantation ne sont pas des opérations inverses l'une de l'autre.

L'excitation coercitive H_c (point A_6) est la valeur de H qui annule le champ magnétique.

Quand l'excitation magnétique est nulle (point A_2), le champ magnétique n'est pas nul. On appelle B_r le champ magnétique rémanent.



Le point A_6 correspond à l'excitation coercitive. Comme $v_X = 2,1\text{ V}$, on a :

$$H_c = \frac{2,1}{0,03} = 70 \text{ A.m}^{-1}$$

Le point A_2 correspond au champ magnétique rémanent. Comme $v_Y = 3,5\text{ V}$, on a :

$$B_r = \frac{3,5}{5} = 0,7 \text{ T}$$

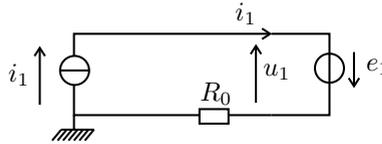
Comme $v_Y = 7,5\text{ V}$, on a :

$$B_m = \frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ T}$$

L'excitation magnétique à saturation est :

$$H_m = \frac{7}{0,03} = 233 \text{ A.m}^{-1}$$

4. Le schéma équivalent à l'entrée est le suivant :



La puissance fournie par le circuit primaire au matériau ferromagnétique est : $P_1 = u_1 i_1 = -e_1 i_1$ car la force d'électromotrice d'induction est orientée en convention générateur. La fem e_1 vaut : $e_1 = -N_1 S \frac{dB}{dt}$.

On a donc : $P_1 = i_1 N_1 S \frac{dB}{dt}$. On a vu que $H = \frac{N_1 i_1}{2\pi a}$. On en déduit :

$$P_1 = \frac{2\pi a}{N_1} H N_1 S \frac{dB}{dt} = 2\pi a S H \frac{dB}{dt}$$

On appelle V le volume du matériau ferromagnétique. La puissance moyenne dissipée est donc :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_1 dt = \frac{1}{T} V \int_0^T H dB$$

La puissance moyenne est donc proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis H en fonction de B . Elle est évacuée sous forme de chaleur dans le matériau.

$\int_0^T H dB = \oint H dB$ représente l'énergie dissipée par unité de volume pendant un cycle dans le matériau ferromagnétique.

Ces pertes sont appelées pertes fer. Elles correspondent à la puissance dissipée par hystérésis et par courants de Foucault (si le matériau est conducteur).

5.

- Pour réaliser un transformateur, il faut avoir une surface de cycle faible (pertes par hystérésis faibles et donc pertes fer faibles) et un faible champ rémanent. On prendra un matériau ferromagnétique doux, par exemple les ferrites doux.

Remarque : Pour négliger les pertes par courant de Foucault, on prendra une carcasse feuilletée (voir exercice « Courants de Foucault dans un cylindre »).



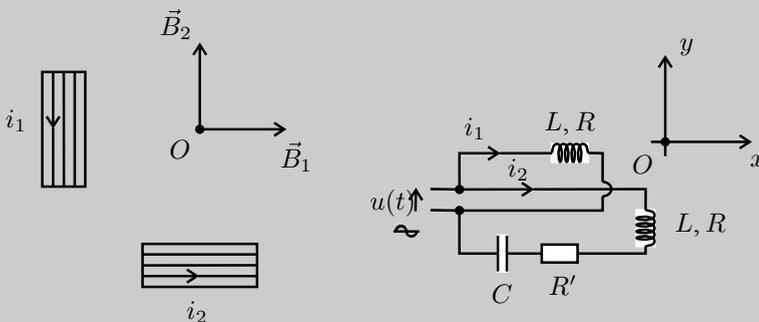
- Pour réaliser un aimant permanent, on souhaite avoir un matériau avec une excitation coercitive élevée. L'aimantation rémanente est difficile à supprimer. On prendra un matériau ferromagnétique dur, par exemple le fer.

Conversion électromécanique

Exercice 12.1 : Champ magnétique tournant (PSI)

Deux bobines identiques, d'inductance L et de résistance R chacune sont disposées de façon à ce que leurs axes se coupent à angle droit en un point O équidistant de leurs centres. Les bobines sont alimentées chacune par un courant alternatif, de même pulsation. On prendra $i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_{m2} \cos(\omega_0 t - \phi)$.

- Déterminer le champ magnétique créé par la bobine 1 en utilisant le champ créé par une spire.
- On souhaite avoir la même intensité efficace et $\phi = \frac{\pi}{2}$. Quelles relations doit-on avoir entre R, R', L, C et ω_0 ?
- Montrer que le champ magnétique résultant en O a un module constant et tourne dans le plan $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ à la vitesse angulaire ω_0 .

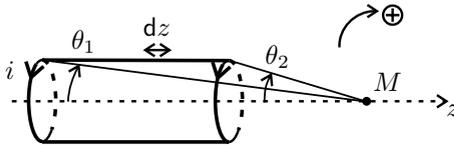


Analyse du problème

Cet exercice permet de créer un champ magnétique tournant. On utilise les complexes plutôt que de rester avec les grandeurs réelles. Il faut savoir déterminer le champ magnétique créé par une bobine.



1. Le champ magnétique créé par une spire de rayon a est $\frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \theta \vec{u}_z$.



On appelle n le nombre de spires par mètre. Soit un élément de longueur dz , d'abscisse z qui contient ndz spires. Le champ créé par ces ndz spires est :

$$d\vec{B} = (n dz) \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

Il faut faire la somme de toutes les contributions. Pour cela, il faut paramétrer. On a le choix entre z et θ . Le plus simple est de tout exprimer en fonction de θ . Pour exprimer dz en fonction de $d\theta$, il faut exprimer z en fonction de θ puis différentier. La distance entre les ndz spires et le point M est $z_M - z$.



On a : $\tan \theta = \frac{a}{z_M - z}$, d'où $z = z_M - \frac{a}{\tan \theta}$ et $dz = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$.

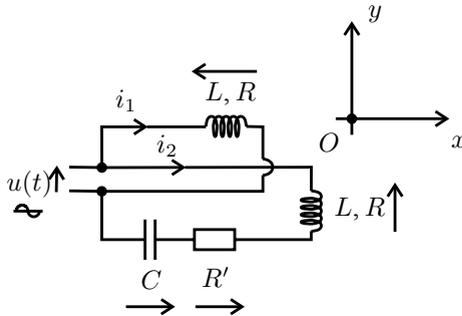
D'où :

$$dB_z = \left(n \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \right) \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \theta = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta$$

Il reste à intégrer entre θ_1 et θ_2 . On obtient :

$$B_z = -\frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

2. Soit $u(t)$ la tension sinusoïdale appliquée aux bornes du circuit électrique.



On écrit la loi des mailles pour calculer les intensités complexes :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{R + jL\omega_0}$$

$$\text{et } \underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{R + jL\omega_0 + R' + \frac{1}{jC\omega_0}} = \frac{\underline{u}}{R + R' + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)}$$

On veut avoir :

$$\begin{cases} I_{m1} = I_{m2} \\ \arg \underline{i}_2 - \arg \underline{i}_1 = -\phi = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

Il est plus simple d'utiliser les parties réelles et parties imaginaires que le module et l'argument. On va exprimer directement \underline{i}_1 et fonction de \underline{i}_2 :
 $\underline{i}_2 = \underline{i}_1 \exp(-j\phi) = j\underline{i}_1$.

$$\text{On a donc : } \frac{\underline{u}}{R + R' + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)} = j \frac{\underline{u}}{R + jL\omega_0}.$$

$$\text{Soit : } j(R + R') - \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) = R + jL\omega_0.$$

$$\text{D'où : } j(R + R' - L\omega_0) - R - \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) = 0.$$

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} R + R' - L\omega_0 = 0 \\ R + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) = 0 \end{cases}$$

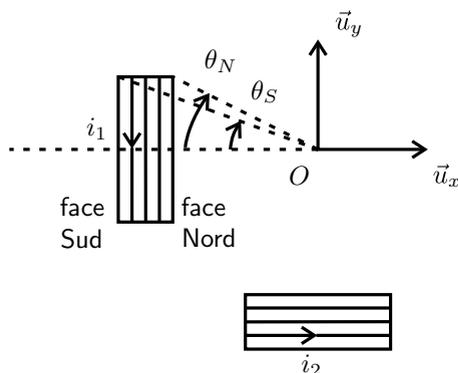
Soit :

$$\begin{cases} R' = L\omega_0 - R \\ C\omega_0 = \frac{1}{R + L\omega_0} \end{cases}$$

3. Les deux bobines sont identiques. D'après la question 1, on a :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 n i_1(t)}{2} (\cos \theta_S - \cos \theta_N) \vec{u}_x$$

$$\text{et } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 n i_2(t)}{2} (\cos \theta_S - \cos \theta_N) \vec{u}_y$$



Le champ magnétique résultant en O est :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 n}{2} (\cos \theta_S - \cos \theta_N) I_{m1} \cos(\omega_0 t) \\ B_y = \frac{\mu_0 n}{2} (\cos \theta_S - \cos \theta_N) I_{m2} \cos(\omega_0 t - \phi) \end{cases}$$

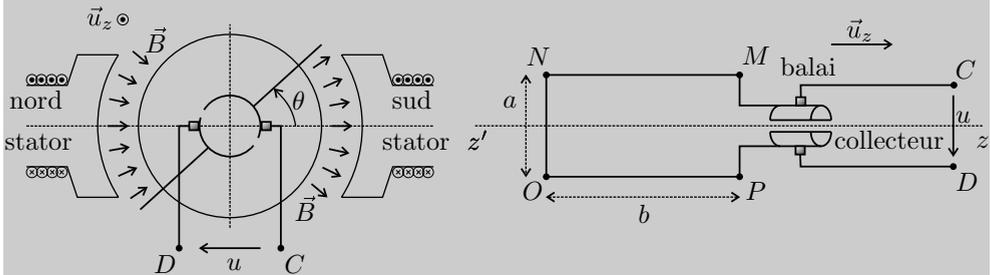
On obtient donc :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = B_0 \cos(\omega_0 t) \\ B_y = B_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

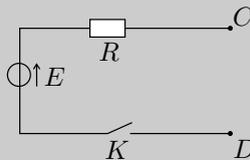
On a bien un champ magnétique de module constant et tournant dans le plan $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ à la vitesse angulaire ω_0 .

Exercice 12.2 : Machine à courant continu (PSI)

On étudie une machine composée d'une partie fixe (stator qui crée le champ magnétique) et d'une partie tournante (spire et collecteur). On considère une spire $MNOP$ de dimensions a et b mobile par rotation autour de l'axe $z'z$. Elle se déplace dans une zone où règne un champ magnétique \vec{B} permanent orthogonal à l'axe $z'z$. Dans la zone où évolue le cadre, le champ magnétique est radial et a une norme B uniforme. On néglige la résistance et l'inductance propre de la spire. Le collecteur, associé au balai, permet de relier le circuit électrique de la partie tournante à un circuit extérieur à la machine. On appelle J le moment d'inertie de la spire $MNOP$ par rapport à l'axe $z'z$. On pose $k = abB$.



1. La machine initialement au repos est insérée dans un circuit électrique suivant. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Déterminer ω en fonction du temps sachant que E est constante.



2. Effectuer un bilan de puissance. Vérifier que le couplage électromécanique est parfait.

3. Le cadre est maintenant soumis à un couple résistant $\Gamma_R = -\alpha\omega$ où α est une constante positive. Déterminer ω en fonction du temps. Interpréter.

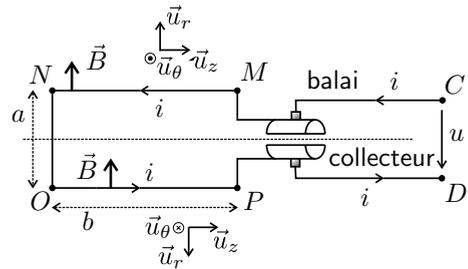
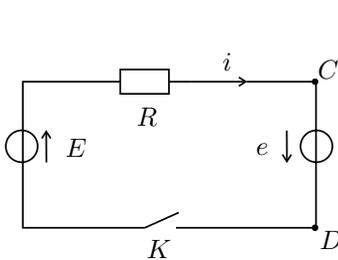
Analyse du problème

L'énoncé n'impose pas une orientation du courant. Il faut choisir une orientation arbitraire du courant. On rajoute alors sur le schéma électrique équivalent une fem en convention générateur. On en déduit le moment des forces de Laplace permettant de mettre en rotation la machine.

Le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe permet d'obtenir l'équation mécanique. La loi des mailles permet d'obtenir l'équation électrique. On obtient deux équations couplées.



1. On oriente le circuit électrique.



Calcul du moment résultant des forces de Laplace :

- Sur la partie MN : la force de Laplace est :

$$\vec{F}_1 = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = -ibB\vec{u}_\theta$$

Le moment du couple suivant $z'z$ vaut :

$$\Gamma_1 = -i\frac{a}{2}bB$$

- Sur la partie NO : il n'y a pas de contribution au couple suivant $z'z$.
- Sur la partie OP : la force de Laplace est :

$$\vec{F}_2 = i \overrightarrow{OP} \wedge \vec{B} = ib\vec{u}_z \wedge -B\vec{u}_r = -ibB\vec{u}_\theta$$

Le moment du couple suivant $z'z$ vaut :

$$\Gamma_2 = -i\frac{a}{2}bB$$

Le moment résultant du couple vaut donc :

$$\Gamma = -iabB = -ki$$

Calcul de la force électromotrice d'induction :

- Sur la partie MN : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_{m1} = v\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = -\frac{a}{2}\omega B \vec{u}_z$$

La force électromotrice d'induction est :

$$e_1 = \int_M^N \vec{E}_{m1} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{a}{2}\omega B (-b) = \frac{abB}{2}\omega$$

- Sur la partie OP : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_{m2} = v\vec{u}_\theta \wedge -B\vec{u}_r = \frac{a}{2}\omega B \vec{u}_z$$

La force électromotrice d'induction est :

$$e_2 = \int_O^P \vec{E}_{m2} \cdot d\vec{l}_2 = \frac{a}{2}\omega B (b) = \frac{abB}{2}\omega$$

- Sur la partie NO : la circulation du champ électromoteur est nulle.

La force électromotrice résultante est donc :

$$e = 2 \left(\frac{a}{2}\omega B \right) b = aBb\omega = k\omega$$

Équation électrique

La loi des mailles s'écrit : $E + e = Ri$, soit :

$$E = Ri - k\omega$$

Équation mécanique

On écrit le théorème du moment cinétique pour la spire (solide en rotation autour d'un axe fixe) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma = -ki$$

Des équations électrique et mécanique, on déduit : $J \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{E + k\omega}{R}$,
soit :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_0}{\tau}$$

On pose : $\tau = \frac{RJ}{k^2}$ et $\omega_0 = -\frac{E}{k}$.

La résolution de l'équation différentielle donne :

$$\omega(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \omega_0.$$

À $t = 0$, la vitesse angulaire est nulle. On a donc :

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par ω . On obtient alors :

$$\begin{cases} Ei = Ri^2 - k\omega i \\ J\omega \frac{d\omega}{dt} = -ki\omega \end{cases}$$

En éliminant le terme de couplage $ki\omega$, on a :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2 \right)$$

Interprétation physique : La puissance fournie par le générateur est égale à somme de la puissance reçue par la résistance (dissipée par effet Joule) et de la puissance mécanique de la force de Laplace.

L'énergie fournie par le générateur est en partie stockée sous forme d'énergie cinétique et en partie dissipée par effet Joule.

La puissance de la force mécanique (force de Laplace) est :

$$P_{\text{méca}} = \Gamma\omega = -ki\omega$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = k\omega i$$

On constate que :

$$P_{\text{élec}} + P_{\text{méca}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

3. L'équation mécanique devient :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -ki - \alpha\omega$$

On a alors : $J \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{E + k\omega}{R} - \alpha\omega$, d'où :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau'} = \frac{\omega'_0}{\tau'}$$

en posant : $\tau' = \frac{RJ}{k^2 + \alpha R}$ et $\omega'_0 = \frac{-kE}{k^2 + \alpha R}$.

$|\omega'_0| < |\omega_0|$: la vitesse angulaire limite en régime permanent est plus faible à cause du couple résistant.

$\tau' < \tau$: le régime transitoire est plus rapide, le couple résistant permet d'atteindre le régime permanent plus vite.

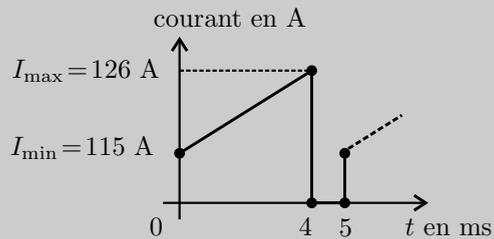
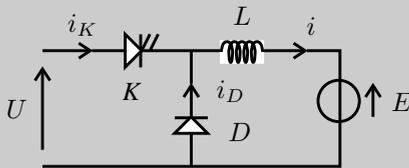
Remarque : On peut être surpris d'avoir un régime permanent atteint plus vite avec des frottements ! En fait, c'est la vitesse angulaire limite qui est plus faible que précédemment.

Conversion électronique

Exercice 13.1 : Hacheur à stockage inductif (PSI)

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T . Il alimente une machine à courant continu considérée comme parfaite. On la modélise par une inductance L en série avec une force électromotrice $E > 0$ constante. La source de tension délivre une tension constante $U = 400$ V. On suppose que $U > E$. La commande du transistor K est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0, \alpha T]$, le transistor K est passant.
- Sur l'intervalle $[\alpha T, T]$, le transistor K est bloqué.



1. Parmi les courants i_K, i_D et i , quel est celui relevé sur le chronogramme ? Quelle est la fréquence de hachage ? Que vaut le rapport cyclique α ?
2. Écrire l'équation différentielle reliant i, U et E sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$. En déduire l'ondulation du courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L, U, E, α et T .
3. Écrire l'équation différentielle reliant i et E sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L, E, α et T .
4. En déduire la relation entre E, α et U . Exprimer Δi en fonction de L, α, T et U . Calculer la valeur de l'inductance L .
5. Représenter i en fonction du temps.
6. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

Cet exercice étudie un hacheur à stockage inductif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de tension continue. On n'étudie pas le régime transitoire. Il ne faut donc pas être surpris d'avoir un courant non nul à $t = 0$. Comme le courant ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre E, U et α .



1. Le courant représenté ne peut pas être i car l'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine.

Lorsque le transistor est bloqué, $i = i_D \geq 0$ puisque le courant i passe dans la diode D . L'intensité i est une fonction décroissante du temps d'après l'orientation de E . Le courant représenté ne peut pas être i_D

Le courant représenté est donc nécessairement le courant i_K .

- Dans l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$, le transistor est passant. L'intensité i_K est une fonction croissante du temps puisque $U > E$. Cela correspond à l'intervalle $[0, 4 \text{ ms}]$ sur le graphe.

- Dans l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$, le transistor est bloqué. La diode est nécessairement passante. On a donc $i_D > 0$ et $i_K = 0$. Cela correspond à l'intervalle $[4 \text{ ms}, 5 \text{ ms}]$ sur le graphe.

Le courant représenté sur le chronogramme est donc bien i_K . La période du phénomène est $T = 5 \text{ ms}$. La fréquence est :

$$f = \frac{1}{T} = 200 \text{ Hz}$$

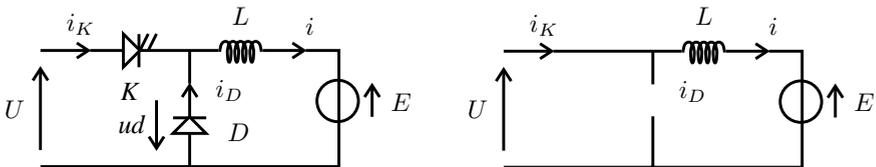
Graphiquement, on lit : $\alpha T = 4 \text{ ms}$. On a donc :

$$\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

2. Intervalle de temps $[0, \alpha T]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur fermé. La tension aux bornes de la diode vaut $u_D = -U < 0$. La diode est donc bloquée.

On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$U = L \frac{di}{dt} + E$$

En séparant les variables, on a :

$$di = \frac{U - E}{L} dt$$

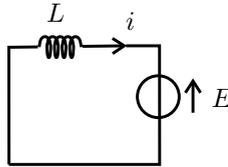
On intègre entre 0 et αT :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{U - E}{L} \alpha T$$

3. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert. On suppose la diode passante.

On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + E = 0$$

En séparant les variables, on a :

$$di = -\frac{E}{L} dt$$

On intègre entre αT et T :

$$I_{\min} - I_{\max} = -\frac{E}{L} (T - \alpha T)$$

Soit :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{E}{L} (T - \alpha T)$$

Vérification des hypothèses : $i_D = i > 0$. La diode est bien passante tant que $I_{\min} > 0$.

4. On a vu dans les deux questions précédentes que :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{U - E}{L} \alpha T \text{ et que } I_{\max} - I_{\min} = \frac{E}{L} (T - \alpha T).$$

On obtient en simplifiant :

$$E = \alpha U$$

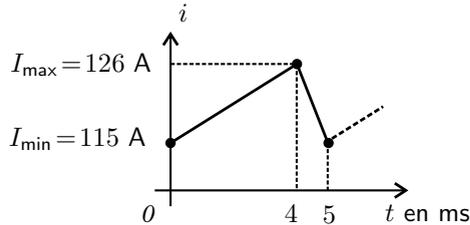
On en déduit :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{U(1 - \alpha)}{L} \alpha T$$

L'inductance L vaut :

$$L = \frac{U(1 - \alpha)}{I_{\max} - I_{\min}} \alpha T = \frac{400 \times (1 - 0,8)}{126 - 115} \times \frac{0,8}{200} = 29 \text{ mH}$$

5. L'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine. Le graphe suivant représente i en fonction du temps.



6. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur U :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T U i_K dt = \frac{U}{T} \int_0^{\alpha T} i_K dt$$



Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.

$\int_0^{\alpha T} i_K dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} \alpha T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{\alpha U}{2} (I_{\min} + I_{\max})$$

Puissance moyenne P_2 reçue par la force électromotrice E :

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T E i dt = \frac{E}{T} \int_0^T i dt$$

$\int_0^T i dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T (1 - \alpha) + \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} \alpha T = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{E}{2} (I_{\min} + I_{\max}) = \frac{\alpha U}{2} (I_{\min} + I_{\max})$$

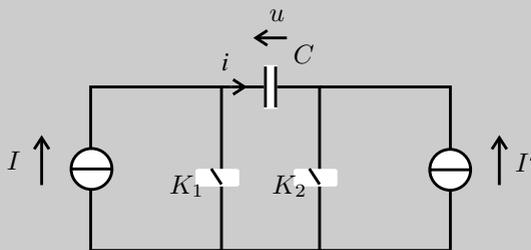
Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.

Exercice 13.2 : Hacheur à stockage capacitif (PSI)

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T . Il alimente un récepteur modélisé par un courant électromoteur $I' > 0$ constante. La source de courant délivre une intensité $I > 0$ constante. La commande des interrupteurs est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0, \alpha T]$, l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 est ouvert.
- Sur l'intervalle $[\alpha T, T]$, l'interrupteur K_1 est ouvert et l'interrupteur K_2 est fermé.



1. Écrire l'équation différentielle reliant u et I' sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$. En déduire l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I', α et T .
2. Écrire l'équation différentielle reliant u et I sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I, α et T .

3. En déduire la relation entre I, α et I' .
4. Représenter u en fonction du temps.
5. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

Cet exercice étudie un hacheur à stockage capacitif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de courant continu. Comme la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre I, I' et α .

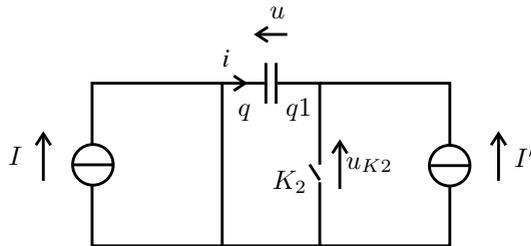
Il faut penser à introduire les tensions U_{\max} et U_{\min} aux bornes du condensateur comme intermédiaire de calcul.

La tension à $t = 0$ n'est pas nulle puisqu'on n'étudie pas le régime transitoire. Il faut donc prendre l'initiative de définir une tension u à $t = 0$ (ici U_{\max} puisque la tension est décroissante au delà) et une autre tension u à $t = \alpha T$ (ici U_{\min} puisque la tension est croissante au delà). En régime permanent, on retrouve nécessairement la même tension u à $t = 0$ et à $t = T$.



1. Intervalle de temps $[0, \alpha T]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à $-I'$. On a donc :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = -I'$$

En séparant les variables, on a :

$$du = -\frac{I'}{C} dt < 0$$

La fonction $u(t)$ est donc décroissante.

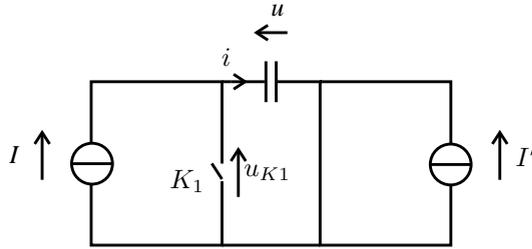
On intègre entre 0 et αT :

$$U_{\min} - U_{\max} = -\frac{I'}{C} \alpha T$$



2. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à I . On a donc :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = I$$

En séparant les variables, on a :

$$du = \frac{I}{C} dt > 0$$

La fonction $u(t)$ est donc croissante.

On intègre entre αT et T :

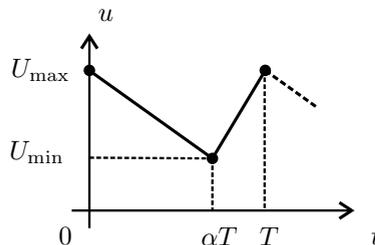
$$U_{\max} - U_{\min} = \frac{I}{C} (1 - \alpha) T$$

3. On a vu dans les deux questions précédentes que $U_{\max} - U_{\min} = \frac{I'}{C} \alpha T$

et que $U_{\max} - U_{\min} = \frac{I}{C} (1 - \alpha) T$. On obtient en simplifiant :

$$I' = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I$$

4. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le graphe suivant représente u en fonction du temps.



5. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur I :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T I u_{K1} dt = \frac{I}{T} \int_{\alpha T}^T u dt$$



Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.

$\int_{\alpha T}^T u dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{U_{\min} + U_{\max}}{2} (1 - \alpha) T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) (1 - \alpha)$$

Puissance moyenne P_2 reçue par le générateur I' :

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T I' (-u_{K2}) dt = \frac{I'}{T} \int_0^{\alpha T} u dt$$

$\int_0^{\alpha T} u dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{U_{\min} + U_{\max}}{2} \alpha T$$

On a donc : $P_1 = \frac{\alpha I'}{2} (U_{\min} + U_{\max})$. On a vu que $I' = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I$, soit :

$$P_1 = \frac{\alpha \frac{1 - \alpha}{\alpha} I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) = \frac{I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) \alpha$$

Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.

Partie 6

Diffusion thermique Diffusion de particules

Plan

14. Diffusion thermique	255
14.1 : Ailette de refroidissement (PC-PSI)	255
14.2 : Simple et double vitrage (PC-PSI)	260
14.3 : Fil parcouru par un courant (PC-PSI)	263
14.4 : Résistance thermique entre deux sphères (PC-PSI)	265
14.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux (PC-PSI)	268
14.6 : Chauffage d'une pièce (PC-PSI)	271
14.7 : Effet de cave (PC-PSI)	273
15. Diffusion de particules	277
15.1 : Profil de concentration en régime permanent (PC-PSI)	277
15.2 : Diffusion dans un cylindre (PC-PSI)	279

Diffusion thermique

Exercice 14.1 : Ailette de refroidissement (PC-PSI)

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5 \text{ mm}$, de longueur L . En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330 \text{ K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300 \text{ K}$. On appelle $\lambda = 400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On

pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$.

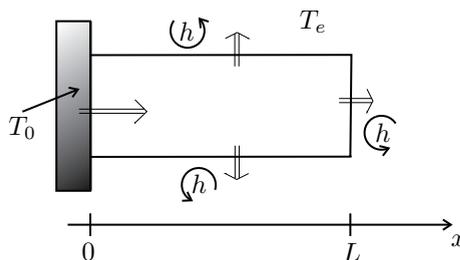
1. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie. Déterminer numériquement le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.
2. On remplace la tige précédente par une tige de longueur $L = 20 \text{ cm}$. Déterminer numériquement $T(x)$. Calculer $T(L)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'une ailette de refroidissement utilisée par exemple pour refroidir un microprocesseur. Il faut être capable d'effectuer un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur dx pour obtenir l'équation différentielle en $T(x)$. On utilisera la continuité de la température ou du flux thermique pour déterminer les constantes d'intégration.



1.



Comme $a \ll L$ (le rayon du tube est très petit devant la longueur), on peut considérer que la température ne dépend que de x .

Cours : Premier principe de la thermodynamique

Il faut prendre l'initiative d'effectuer un bilan thermique sur un volume élémentaire de section $S = \pi a^2$ compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt .

La transformation est isobare puisque le système est en contact avec l'air qui maintient une pression constante. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

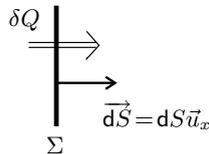
$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- dH est la variation d'enthalpie du système entre t et $t + dt$. Dans l'exercice, elle est nulle puisqu'on est en régime stationnaire (on dit aussi régime permanent).
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici : $\delta W' = 0$
- δQ est le transfert thermique algébriquement reçu pendant dt .

On divise souvent le premier principe de la thermodynamique par dt pour faire apparaître des puissances thermiques.

Puissance thermique par conduction traversant une surface Σ

Soit une surface Σ orientée suivant \vec{u}_x .



Le transfert thermique δQ qui traverse la surface Σ pendant dt est :

$$\delta Q = \Phi dt = P_{tR} dt$$

Φ est la **puissance thermique** par conduction qui traverse Σ . On l'appelle également **flux thermique**. Le terme puissance thermique est préférable puisqu'il fait référence à l'unité du flux thermique (le Watt).

On peut l'écrire avec le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} . On a alors :

$$\delta Q = \Phi dt = \int \int_{M \in \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} dt$$

On projette sur \vec{u}_x . Le transfert thermique qui traverse S pendant dt dans le sens \vec{u}_x est :

$$\delta Q = \int \int_{M \in \Sigma} j_{th} dS dt$$

Loi de Fourier

La loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

λ est la conductivité thermique du milieu (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Elle est toujours positive. Le signe $-$ vient du fait que le transfert thermique se fait spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

Conditions aux limites

On n'a pas de discontinuité de la température à l'interface solide-solide ou solide-fluide immobile car le transfert thermique est de même nature (transfert thermique conductif). Le contact est supposé parfait.

On utilise très souvent la continuité du flux thermique au niveau des interfaces. Les interfaces ne peuvent pas accumuler d'énergie car l'épaisseur est infiniment petite.

On a une discontinuité de la température à l'interface solide-fluide en mouvement. On note T_P la température de la paroi solide et T_F la température de fluide en mouvement. On utilise souvent la loi de Newton :

$$\delta Q = hS(T_P - T_F)dt$$

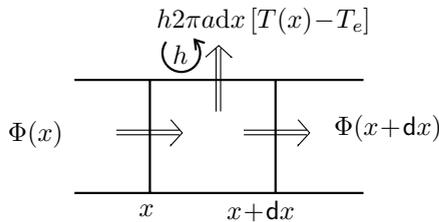


Il faut faire très attention aux signes. Comme le transfert thermique se fait du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. δQ est donc orienté algébriquement de la paroi vers le fluide.

Cours : h est appelé coefficient de transfert conducto-convectif ou coefficient d'échange entre le solide et le fluide (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$). Tout se passe comme si on avait une discontinuité de la température au niveau de la paroi. On fait l'approximation qu'une petite épaisseur d'air est quasiment au repos sur une très faible épaisseur appelée couche limite thermique.



On fait un bilan thermique sur une tranche comprise entre x et $x + dx$:



$\Phi(x)$ est la puissance thermique qui rentre en x .

$\Phi(x + dx)$ est la puissance thermique qui sort en $x + dx$.

$h2\pi a dx [T(x) - T_e]$ est la puissance thermique qui sort à travers la surface latérale $2\pi a dx$



Si $T(x) > T_e$, le transfert thermique est positif et effectivement dirigé vers l'extérieur. C'est bien une puissance thermique effectivement perdue.



La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique sur une tranche s'écrit en régime stationnaire :

$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt - h2\pi a dx [T(x) - T_e] dt$$

On a donc :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - h2\pi a dx [T(x) - T_e] = 0$$

La loi de Fourier est : $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$.

La puissance thermique $\Phi(x)$ qui traverse la surface πa^2 orientée suivant \vec{u}_x est :

$$\Phi(x) = j_{\text{th}} \pi a^2 = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi}{dx} dx - h2\pi a dx [T(x) - T_e] &= \lambda \pi a^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx - h2\pi a dx [T(x) - T_e] \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_e$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. Soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$$

- Solution générale de l'équation homogène.

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$, soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$.

La solution générale est donc : $T_{SG} = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

- Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

$$T_{SP} = T_e$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Il faut deux conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.
- La température doit rester finie si $x \rightarrow \infty$. On a donc $A = 0$.

La constante d'intégration B est : $B = T_0 - T_e$. On obtient :

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Numériquement, on a :

$$T(x) = 300 + 30 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

2. On a toujours :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

La distance caractéristique vaut $\delta = 28,9$ cm. La longueur de la tige vaut 20 cm. On ne peut plus considérer comme dans la question précédente que la longueur est très grande devant la distance caractéristique. On n'a donc plus les mêmes conditions aux limites.

Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.

La deuxième condition aux limites est plus délicate à trouver. On a une discontinuité de la température à cause du flux conducto convectif en $x = L$.

Il faut raisonner sur la **continuité du flux thermique** en $x = L$.



La continuité du flux thermique en $x = L$ permet d'obtenir la deuxième équation :

$$j_{\text{th}}(L)\pi a^2 = h\pi a^2 [T(L) - T_e]$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h [T(L) - T_e]$$

Comme $\frac{dT}{dx} = \frac{A}{\delta} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{B}{\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, on a :

$$-\frac{\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

On a un système à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} T_0 = T_e + A + B \\ -\frac{\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right) \end{cases}$$

La résolution numérique donne : $A = 5,92$ et $B = 24,08$.

On a donc :

$$T(x) = 300 + 5,92 \exp\left(\frac{x}{0,289}\right) + 24,08 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

Pour $x = L$, la température est égale à 324 K.

Remarque : Si la longueur de la tige est supérieure à 3, alors on peut considérer que la tige est de longueur quasi-infinie. On retrouve alors la résolution plus simple de la question 1.

Exercice 14.2 : Simple et double vitrage (PC-PSI)

On considère une pièce à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$. La température extérieure est $T_e = 5^\circ\text{C}$. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3 mm. On suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers les autres parois de la pièce. On se place en régime stationnaire.

1. Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.

2. On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{\text{air}} = 0,025 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

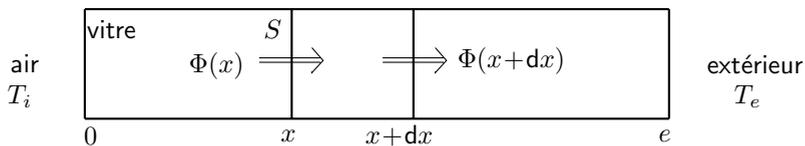
Analyse du problème

En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique en l'absence de production de chaleur. On pourra alors utiliser la notion de résistance thermique et travailler sur un schéma thermique équivalent. En appliquant le diviseur de tension, on pourra déterminer les différentes températures.

L'énoncé ne donne pas le coefficient de transfert conducto-convectif entre la vitre et l'air. On néglige donc la discontinuité de température aux interfaces vitre-air.



1. On appelle S la surface de la vitre. Le transfert thermique se fait suivant l'axe Ox dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.



Cours : La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit sur une tranche en régime stationnaire :

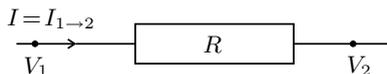
$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt$$

On a donc conservation du flux thermique :

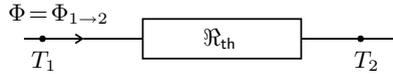
$$\Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$$

On note Φ le flux à travers les différentes sections de la vitre.

La loi d'Ohm s'écrit en convention récepteur : $V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}$. R est toujours positif.



La résistance thermique est définie par analogie : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.



Interprétation physique : Si $T_1 > T_2$, le transfert thermique se fait des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

Analogie avec l'électrocinétique :

$$\begin{aligned} T &\rightarrow V \\ \mathfrak{R}_{\text{th}} &\rightarrow R \\ \Phi = P_{\text{th}} &\rightarrow I \end{aligned}$$

Le flux à travers une surface S à l'abscisse x est :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

On sépare les variables et on intègre entre $x = 0$ et $x = e$.

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx, \text{ d'où } T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda S} e.$$

$$\text{On obtient : } T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \Phi.$$

La résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

Remarque :

On peut la retrouver par analogie avec l'électricité. La résistance d'un fil conducteur de conductivité γ , de section S et de longueur L est :

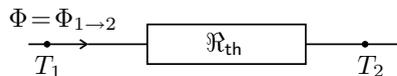
$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Dans de nombreux exercices, on fera le schéma thermique équivalent.



On est en régime stationnaire. Il n'y a pas de création de chaleur dans la vitre. On a donc conservation du flux thermique.

La résistance thermique est définie par analogie avec l'électricité : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.



En coordonnées cartésiennes, la résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S} = 7,24 \times 10^{-3} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

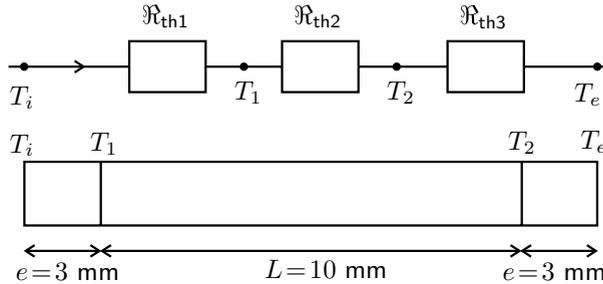
La surface S vaut : $S = 0,6 \times 0,6 = 0,36 \text{ m}^2$.

On en déduit le flux thermique sortant pour le simple vitrage :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{th}} = 2070 \text{ W}$$

2. On se place toujours en régime stationnaire. Il n'y a pas de terme de création. On a conservation du flux thermique à travers les différentes sections du double vitrage.

On peut donc utiliser le schéma électrique suivant avec des résistances thermiques en série.



Les résistances thermiques sont :

$$\mathfrak{R}_{th1} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{th2} = \frac{L}{\lambda_{air} S} = 1,11 \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{th3} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

La résistance thermique équivalente est :

$$\mathfrak{R}_{theq} = \mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}_{th3} = 1,13 \text{ K.W}^{-1}$$

On en déduit le flux thermique sortant :

$$\Phi_2 = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}_{th3}} = 13,3 \text{ W}$$

On a un flux thermique sortant 155 fois plus faible que dans la question 1. D'où l'intérêt du double vitrage pour l'isolation thermique.

On peut calculer les différentes températures en utilisant le diviseur de tension :

$$T_1 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{th1}}{\mathfrak{R}_{theq}} (T_e - T_i)$$



Il ne faut pas écrire T_1 au lieu de $T_1 - T_i$. Il faut considérer une tension et non un potentiel pour appliquer le diviseur de tension.



De même, on a :

$$T_2 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2}}{\mathfrak{R}_{theq}} (T_e - T_i)$$

L'application numérique donne : $T_1 = 19,9^\circ\text{C}$ et $T_2 = 5,1^\circ\text{C}$.

Exercice 14.3 : Fil parcouru par un courant (PC-PSI)

On considère un fil cylindrique de conductivité électrique γ , de conductivité thermique λ , de rayon a et de longueur L . On suppose que $T(0) = T(L) = T_0$. Le fil est parcouru par un courant électrique d'intensité constante I . On néglige les pertes thermiques à travers la surface latérale. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer la température $T(x)$ dans le fil.
2. Pour quelle abscisse la température passe-t-elle par un maximum ?
3. Ce résultat était-il prévisible par une analyse physique ?

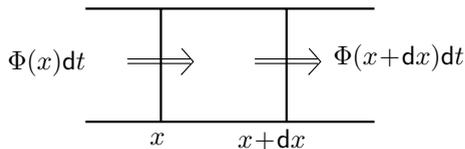
Analyse du problème

En régime stationnaire, on n'a pas continuité du flux thermique car le fil reçoit de la puissance du circuit électrique. Il faut faire attention aux signes lors de l'écriture du premier principe de la thermodynamique.

Une analyse des symétrie du problème permet de prévoir qualitativement où la température est maximale dans le fil.



1. On considère une tranche de section $S = \pi a^2$ comprise entre x et $x + dx$ pendant dt . La résistance de longueur dx et de section S est : $dR = \frac{dx}{\gamma S}$.



Pour une transformation isobare, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici le système reçoit un travail électrique. En convention récepteur, le travail reçu est : $\delta W_{\text{élec}} = dRI^2 dt = \frac{dx}{\gamma S} I^2 dt$.

- δQ est le transfert algébriquement reçu. Il vaut :

$$\Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt = -\frac{d\Phi}{dx}dxdt$$



Attention aux erreurs de signe pour le travail électrique reçu. Il faut bien mettre un signe + devant dRI^2dt car c'est bien une énergie reçue par le système de la part du circuit électrique. Cette énergie reçue est également appelée énergie dissipée par effet Joule.



La loi de Fourier est :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Le flux thermique ou la puissance thermique à travers la section S d'abscisse x est :

$$\Phi = j_{th}S = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On obtient donc pour le premier principe :

$$-\frac{d\Phi}{dx}dxdt + \frac{dx}{\gamma S}I^2dt = 0 = \lambda \pi a^2 \frac{d^2T}{dx^2}dxdt + \frac{dx}{\gamma \pi a^2}I^2dt$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4}$$

On intègre une première fois :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4}x + A$$

Une deuxième intégration permet d'écrire :

$$T = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\left| \begin{array}{l} T(0) = T_0 = B \\ T(L) = T_0 = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L^2}{2} + AL + B \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} B = T_0 \\ A = \frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L}{2} \end{array} \right.$$

On obtient finalement :

$$T(x) = \frac{I^2}{2\lambda \gamma \pi^2 a^4} (-x^2 + Lx) + T_0$$

2. On calcule la dérivée de T par rapport à x pour déterminer où la température passe par un maximum :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{I^2}{2\lambda\gamma\pi^2a^4}(-2x + L)$$

La dérivée est nulle pour $x = \frac{L}{2}$.

La température est donc maximale au milieu du fil.

3. Chaque élément de longueur dx du fil reçoit la même énergie électrique.

Les températures sont égales aux deux extrémités. Le plan $x = \frac{L}{2}$ est un plan de symétrie pour la température. La température est donc croissante entre $x = 0$ et $x = \frac{L}{2}$ puis décroissante entre $x = \frac{L}{2}$ et L .

On peut donc prévoir qualitativement que la température est maximale au milieu du fil.

Exercice 14.4 : Résistance thermique entre deux sphères (PC-PSI)

On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères de centre O , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ , R_1 et R_2 . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.
2. En utilisant la résistance thermique entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.

Analyse du problème

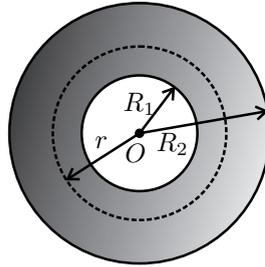
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux sphères.



1. On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et ϕ . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}\vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des sphères de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les sphères de rayon r et $r + dr$ pendant une durée dt :

$$4\pi r^2 dr \mu c_p (T(t + dt) - T(t)) = 4\pi r^2 dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$= \Phi(r) dt - \Phi(r + dr) dt$$

En régime stationnaire $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r + dr) = cte = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers une sphère de rayon r (r compris entre R_1 et R_2).

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} = \frac{e}{4\pi\lambda R_1 R_2} \simeq \frac{e}{4\pi\lambda R_1^2}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 4\pi R_1^2$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$ est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 4\pi r^2}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différentes sphères de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{A dr}{r^2}$. L'intégration donne :

$$T = -\frac{A}{r} + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{A}{R_1} + B \\ T_2 = -\frac{A}{R_2} + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$ et $B = T_1 + \frac{A}{R_1}$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = -\frac{A}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \lambda 4\pi$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Exercice 14.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux (PC-PSI)

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois cylindriques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire. On néglige les effets de bord.

1. Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique entre deux cylindres de hauteur H en fonction de λ , R_1 , R_2 et H . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.

2. En utilisant la résistance thermique entre un cylindre de rayon r et un cylindre de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .

Analyse du problème

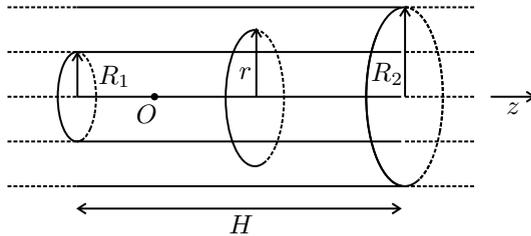
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux cylindres.



1. On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et translation d'axe Oz . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}} \vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des cylindres de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les cylindres de rayon r et $r+dr$, de hauteur H pendant une durée dt :

$$\begin{aligned} 2\pi r H dr \mu c_p (T(t+dt) - T(t)) &= 2\pi r H dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \Phi(r) dt - \Phi(r+dr) dt \end{aligned}$$

En régime stationnaire, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r+dr) = \text{cte} = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers un cylindre de rayon r (r compris entre R_1 et R_2) et de hauteur H .

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = j_{\text{th}} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \frac{dr}{r}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux cylindres :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{\lambda 2\pi R_1 H}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 2\pi R_1 H$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre un cylindre de rayon r (hauteur H) et un cylindre de rayon $r+dr$ (hauteur H) est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 2\pi r H}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différents cylindres de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{A dr}{r}$. L'intégration donne :

$$T = A \ln r + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = A \ln R_1 + B \\ T_2 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ et $B = T_1 - A \ln R_1$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{th} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H = -\frac{A}{r} 2\pi r H = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \lambda 2\pi H$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \Re_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\Re_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Exercice 14.6 : Chauffage d'une pièce (PC-PSI)

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^\circ \text{C}$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $\Re_{th1} = 10,0 \times 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $\Re_{th2} = 2,0 \times 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10^\circ \text{C}$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P .

Analyse du problème

On étudie la puissance thermique nécessaire pour maintenir constante la température d'une pièce. Comme on se place en régime stationnaire sans terme de création, on pourra utiliser l'association série et parallèle des résistances thermiques. Il faut faire attention aux signes lors de l'orientation des différentes puissances thermiques.



1. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à la pièce pendant une durée dt . En régime stationnaire, on a :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$.

$\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici $\delta W' = 0$.

En divisant par dt , on a :

$$0 = P_{\text{total reçu}}$$

$P_{\text{total reçu}}$ est la puissance thermique algébriquement reçue par la pièce.

Il y a trois puissances thermiques algébriquement reçues par la pièce :

$$P_{\text{total reçu}} = P + P_1 + P_2$$

- P est la puissance thermique apportée par le chauffage (par exemple un radiateur électrique).
- $P_1 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les 4 murs et le sol.
- $P_2 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les tuiles et le plafond.



Dans l'écriture du premier principe, les puissances sont algébriquement reçues par le système. Il faut donc écrire $T_e - T_i$ et non $T_i - T_e$ car $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}}$ est une puissance algébriquement orientée de l'extérieur vers l'intérieur.

Ici $T_e < T_i$, donc $P_1 < 0$. C'est donc en fait une puissance effectivement fournie à l'extérieur.



On en déduit que :

$$P = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}} \right)$$

D'où

$$P = 6000 \text{ W}$$

Remarque : Les deux résistances thermiques sont en parallèle. La résistance thermique est définie par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}}$$

La puissance algébriquement reçue de l'extérieur est $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th}}$. Le premier principe s'écrit alors :

$$0 = P + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th}}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.



2. On souhaite avoir la même température avec une puissance thermique $P' = 3000 \text{ W}$. On appelle \mathfrak{R}'_{th2} la résistance thermique de la plaque de matériau isolant que l'on rajoute entre le plafond et les tuiles. En régime stationnaire, la résistance thermique du plafond, de la plaque de matériau et des tuiles est alors : $\mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}'_{th2}$.

Remarque : Les deux résistances sont bien en série car on se place en régime stationnaire sans terme de création. On a conservation du flux thermique (ou de la puissance thermique) à travers les différentes sections du plafond, du matériau isolant et des tuiles.



Le bilan thermique s'écrit alors :

$$P' = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th1}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} \right)$$

On a alors :

$$P' = (T_i - T_e) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{th1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} = \frac{P'}{T_i - T_e} - \frac{1}{\mathfrak{R}_{th1}} = \frac{P'\mathfrak{R}_{th1} - (T_i - T_e)}{(T_i - T_e)\mathfrak{R}_{th1}}$$

On obtient finalement :

$$\mathfrak{R}'_{th2} = \frac{(T_i - T_e)\mathfrak{R}_{th1}}{P'\mathfrak{R}_{th1} - (T_i - T_e)} - \mathfrak{R}_{th2}$$

Application numérique : $\mathfrak{R}'_{th2} = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$.

Exercice 14.7 : Effet de cave (PC-PSI)

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est : $T(0) = T_0 + a \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. Pour le sol, on note $\mu = 3,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique, $c = 515 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique et $\lambda = 1,2 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ la conductivité thermique. On pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$$

1. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$.
Déterminer $\underline{f}(x)$. En déduire $T(x,t)$.

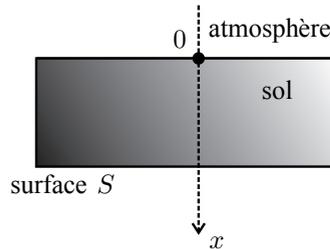
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15°C autour d'une température moyenne de 3°C en hiver.

Analyse du problème

On étudie les répercussions dans le sol des variations de température de l'atmosphère. Il faut savoir établir l'équation de la diffusion à une dimension en écrivant le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi.



1.



On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume de section S , compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

$$\mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

On en déduit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En notation complexe, on a :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors : $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t}$

avec $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t)$ et $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t) = \frac{\mu c}{\lambda} \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} j \omega \underline{f}(x) = 0$$

D'après l'énoncé, on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$. On obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{2j}{\delta^2} = 0$, soit :

$$r^2 = \frac{2j}{\delta^2}$$



Il faut savoir que $j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\sqrt{j} = \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.



On en déduit :

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

On obtient alors :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} \exp\left(\frac{-(1+j)x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{(1+j)x}{\delta}\right)$$

La température complexe est :

$$\underline{T} = T_0 + \left(\underline{A} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{-jx}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{jx}{\delta}\right) \right) \exp(j\omega t)$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration complexes avec les conditions aux limites :

- Le sol a une profondeur infinie. Comme la température doit rester finie, on a nécessairement $\underline{B} = 0$.
- Pour $z = 0$, on a : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. D'où $\underline{A} = a$.

On obtient alors :

$$\underline{T} = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

On revient aux grandeurs réelles. Soit :

$$T(x, t) = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

2. Application numérique : $\delta = 14,6$ cm. Pour $x = 50$ cm, on a :

$$T(x, t) = 3 + 0,49 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

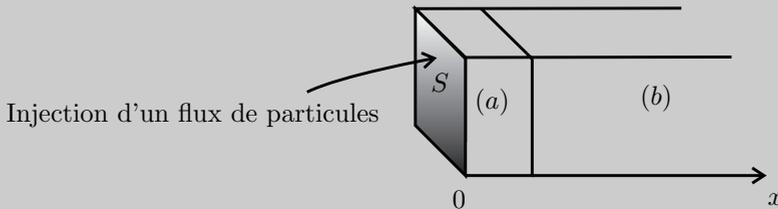
On a donc des variations très faibles de la température à une profondeur de 50 cm. Le sol n'est plus gelé à cette profondeur. C'est l'effet de cave.

On retrouve une profondeur caractéristique comme dans l'exercice sur l'effet de peau. Au delà de quelques δ , les variations de température sont négligeables.

Diffusion de particules

Exercice 15.1 : Profil de concentration en régime permanent (PC-PSI)

On considère une solution contenant un composé de densité particulaire n dépendant uniquement de la coordonnée spatiale x . Dans la région (a) de longueur δ , la densité particulaire est variable avec x , alors que dans la région (b) elle est constante de valeur n_S . Sur le plan de cote $x = 0$ est injecté un flux constant de l'espèce étudiée. On appelle D le coefficient de diffusion dans la région (a).



1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité particulaire $n(x,t)$ en régime variable.
2. Pourquoi cette équation décrit-elle un phénomène irréversible ?
3. Exprimer en régime stationnaire la densité particulaire $n(x)$ ainsi que le flux de particules injecté en fonction de $n_0 = n(0)$, n_S , δ , D et S .

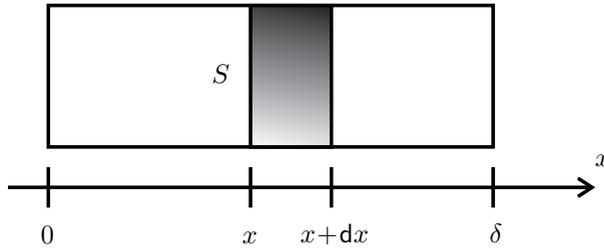
Analyse du problème

On utilise les coordonnées cartésiennes pour traiter cet exercice de diffusion de particules. On effectue un bilan de particules pendant dt sur volume Sdx pour obtenir l'équation aux dérivées partielles.

En régime stationnaire, on obtient une équation différentielle avec une seule variable. On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration.



1. On effectue un bilan de particules pendant dt sur un volume de section S compris entre x et $x + dx$:



La variation du nombre de particules pendant dt est égale au nombre de particules qui rentrent pendant dt – le nombre de particules qui sortent pendant dt + le nombre de particules qui sont produites pendant dt .

- On appelle d^2N la variation du nombre de particules pendant dt . À l'instant t , le nombre de particules est $n(t)Sdx$. À l'instant $t + dt$, le nombre de particules est $n(t + dt)Sdx$. On a donc :

$$d^2N = (n(t + dt) - n(t)) Sdx = \frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx$$

- Ce qui rentre pendant dt à l'abscisse x : $j_D(x) Sdt$.
- Ce qui sort pendant dt à l'abscisse $x + dx$: $j_D(x + dx) Sdt$.
- Il n'y a pas de particules produites dans le volume Sdx .

Le bilan de particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx = j_D(x) Sdt - j_D(x + dx) Sdt = -\frac{\partial j_D}{\partial x} Sdx dt$$

La loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

2. En régime stationnaire, on a : $\frac{d^2n}{dx^2} = 0$. Une première intégration permet

d'écrire : $\frac{dn}{dx} = A$. Une deuxième intégration donne :

$$n(x) = Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Pour $x = 0$: $n(0) = n_0 = B$.
- Pour $x = \delta$: $n(\delta) = n_S = A\delta + B$.

On obtient finalement : $B = n_0$ et $A = \frac{n_S - n_0}{\delta}$.

La densité particulaire $n(x)$ est donc :

$$n(x) = \frac{n_S - n_0}{\delta}x + n_0$$

Le vecteur densité de flux de particules est :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -A \vec{u}_x = -\frac{n_S - n_0}{\delta} \vec{u}_x$$

Le flux de particules à travers une surface S est :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_S S = -\frac{n_S - n_0}{\delta} S$$

Remarque : En régime stationnaire sans terme de création, on a conservation du flux de particules à travers les différentes sections du cylindre (a). On vérifie que si $n_S > n_0$, le flux est bien positif.

Exercice 15.2 : Diffusion dans un cylindre (PC-PSI)

On considère un cylindre d'axe Oz , de longueur L très grande devant le rayon R_2 . On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique de même axe, de rayon R_1 , remplie d'un gaz avec une densité particulaire n_1 maintenue constante. On néglige les effets de bord ce qui revient à considérer la diffusion radiale entre $r = R_1$ et $r = R_2$. On note D le coefficient de diffusion.

1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité particulaire $n(r,t)$ en régime variable.
2. On se place en régime stationnaire. Exprimer la densité particulaire $n(r)$ pour r compris entre R_1 et R_2 en fonction de n_1 , r , D , R_1 et j_{D1} (densité de flux de particules pour $r = R_1$). En déduire le vecteur densité de flux de particules en fonction de j_{D1} , R_1 et r .

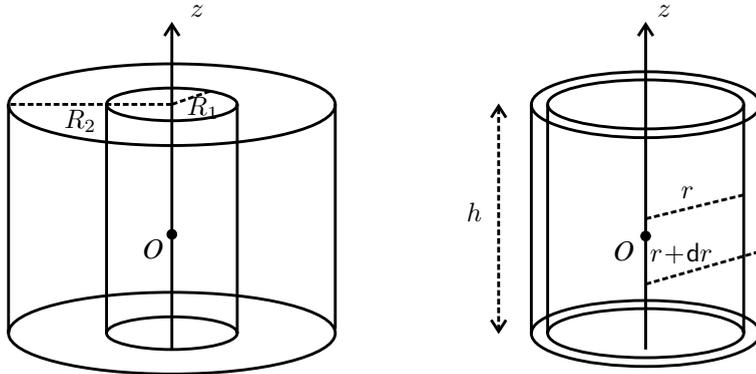
Analyse du problème

On utilise les coordonnées cylindriques pour traiter cet exercice de diffusion de particules. L'exercice ne donne pas le Laplacien en coordonnées cylindriques. Il faut donc effectuer un bilan de particules pendant dt sur le volume compris entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon $r + dr$ pour obtenir l'équation aux dérivées partielles.

En régime stationnaire, on obtient une équation différentielle avec une seule variable. On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration : continuité de la densité particulaire et continuité du flux de particules à la traversée d'une surface.



On effectue un bilan de particules pendant dt sur un volume de hauteur h compris entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon $r + dr$:



- On appelle d^2N la variation du nombre de particules pendant dt . À l'instant t , le nombre de particules est $n(t) \times h \times 2\pi r \times dr$. À l'instant $t + dt$, le nombre de particules est $n(t + dt) \times h \times 2\pi r \times dr$. On a donc :

$$d^2N = (n(t + dt) - n(t)) h 2\pi r dr = \frac{\partial n}{\partial t} dt h 2\pi r dr$$

- Ce qui rentre pendant dt en r : $j_D(r) 2\pi r h dt$.
- Ce qui sort pendant dt en $r + dr$: $j_D(r + dr) 2\pi (r + dr) h dt$.
- Il n'y a pas de particules produites dans le volume $h \times 2\pi r \times dr$.

Le bilan de particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt h 2\pi r dr = 2\pi h dt [j_D(r) r - j_D(r + dr) (r + dr)]$$



Il ne faut pas appliquer la formule de Taylor à j_D mais à la fonction $f(r) = r j_D$:

$$f(r + dr) = f(r) + \frac{\partial f}{\partial r} dr$$



On a alors :

$$\frac{\partial n}{\partial t} r dr = - \frac{\partial (r j_D)}{\partial r} dr$$

La loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial r} \vec{u}_r$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} D \frac{\partial \left(r D \frac{\partial n}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

2. En régime stationnaire, on a :

$$\frac{d\left(rD\frac{dn}{dr}\right)}{dr} = 0$$

On a donc : $rD\frac{dn}{dr} = A$

On sépare les variables : $dn = \frac{A}{D} \frac{dr}{r}$. Soit :

$$n = \frac{A}{D} \ln r + B$$

On a deux constantes d'intégration A et B . Il faut donc deux conditions aux limites.

En régime permanent, sans terme de création, on a conservation du flux de particules à travers un cylindre de hauteur h et de rayon r (avec r compris entre R_1 et R_2).

Le flux de particules est :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_D 2\pi r h = -D \frac{dn}{dr} 2\pi r h \\ &= -D \left(\frac{A}{Dr} \right) 2\pi r h = -2\pi A h \end{aligned}$$

Le flux de particules ne dépend pas de r . On a deux conditions aux limites :

- Continuité de la densité particulaire pour $r = R_1$:

$$n_1 = \frac{A}{D} \ln R_1 + B$$

- Continuité du flux de particules pour $r = R_1$:

$$\Phi = j_{D1} 2\pi R_1 h = -2\pi A h$$

On a donc :

$$\begin{cases} A = -j_{D1} R_1 \\ B = n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 \end{cases}$$

On a finalement :

$$n = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln r + n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln \frac{r}{R_1} + n_1$$

Le vecteur densité de flux de particules est :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = j_{D1} \frac{R_1}{r} \vec{u}_r$$

Remarque : On vérifie l'homogénéité et la pertinence de de la dernière relation. Si $j_{D1} > 0$, on a bien un flux de particules dirigé suivant $+\vec{u}_r$.

Partie 7

Thermodynamique

Plan

16. Potentiels thermodynamiques	285
16.1 : Bouteille d'air comprimé (PC)	285
16.2 : Travail maximum récupérable (PC)	289
17. Corps pur sous deux phases	291
17.1 : Machine frigorifique (PC)	291
17.2 : Cycle de Rankine (PC)	296
17.3 : Diagramme (p, T) et relation de Clapeyron (PC)	298
17.4 : Surfusion (PC)	301

Potentiers thermodynamiques

Exercice 16.1 : Bouteille d'air comprimé (PC)

On considère une bouteille d'air comprimé de volume $V_1 = 50 \text{ L}$, à la pression $p_1 = 50 \text{ bar}$ et à la température $T_1 = 290 \text{ K}$. Elle est en contact avec l'atmosphère à la température $T_0 = 290 \text{ K}$ et à la pression $p_0 = 1,0 \text{ bar}$. On suppose que l'air est un gaz parfait.

1. Calculer le travail maximum récupérable pour une évolution monotherme de l'état 1 vers l'état 2 ($p_2 = 1,0 \text{ bar}$).
2. On suppose qu'une partie de ce travail récupérable est utilisé pour lutter contre la pression atmosphérique. Calculer le travail maximum récupérable dans cette condition ?

Analyse du problème

Cet exercice traite du travail maximum récupérable pour une évolution monotherme. Il faut utiliser le potentiel thermodynamique F^* dans la première question et le potentiel thermodynamique G^* dans la deuxième question puisqu'on tient compte du travail des forces de pression.



1. Travail maximum récupérable

Système fermé : air compris dans la bouteille.

$$\left. \begin{array}{l} \text{État initial 1} \\ V_1 = 50 \text{ L} \\ p_1 = 50 \text{ bar} \\ T_1 = T_0 = 290 \text{ K} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{État final 2} \\ V_2 \\ p_2 = p_0 = 1,0 \text{ bar} \\ T_2 = T_0 = 290 \text{ K} \end{array} \right\}$$

Le premier et le deuxième principe de la thermodynamique s'écrivent pour le système fermé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = W + Q \\ \Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T_0} + S_c \end{array} \right.$$

En remplaçant Q par $\Delta U - W$ dans la deuxième équation, on a :

$$\Delta S - \frac{\Delta U - W}{T_0} = S_c$$

L'entropie créée est positive ou nulle. On a alors :

$$T_0 \Delta S - \Delta U + W \geq 0$$

Soit :

$$-(\Delta U - T_0 \Delta S) \geq -W$$

On définit le potentiel thermodynamique $F^* = U - T_0 S$. On en déduit que :

$$-\Delta F^* \geq -W$$



Le travail W est algébriquement reçu par le système. Le travail fourni par le système vaut donc $-W$.



Comme $-W \leq -\Delta F^*$, le travail maximum récupérable est $-\Delta F^*$.

Calcul du potentiel thermodynamique F^*

L'air est un gaz parfait. On a donc $dU = C_V dT$. On appelle U_{ref} l'énergie interne pour une température de référence T_{ref} . On a alors :

$$U = U_{\text{ref}} + C_V(T - T_{\text{ref}})$$

Remarque : Pour calculer l'entropie, on utilise le jeu de variables (T, p) plutôt que le jeu de variables (T, V) puisqu'on connaît bien les températures et les pressions. Il faut exprimer dH de deux manières.



$$\begin{cases} dH = C_p dT \\ dH = T dS + V dp \end{cases}$$

En utilisant $pV = nRT$, on obtient :

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}$$

On intègre entre un état de référence et un état quelconque :

$$S - S_{\text{ref}} = C_p \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}}$$

Le potentiel thermodynamique F^* vaut alors :

$$F^* = U_{\text{ref}} + C_V (T - T_{\text{ref}}) - T_0 \left(S_{\text{ref}} + C_P \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} \right)$$

On en déduit la variation de F^* entre l'état 1 et l'état 2 :

$$\Delta F^* = F_2^* - F_1^* = T_0 \left(nR \ln \frac{p_2}{p_1} \right)$$

On écrit l'équation d'état des gaz parfaits dans l'état 1 : $p_1 V_1 = nRT_0$. On a alors :

$$\Delta F^* = -p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Le travail maximum récupérable vaut donc :

$$-\Delta F^* = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 9,8 \times 10^5 \text{ J}$$

Il est obtenu pour une évolution monotherme réversible.

2. Travail maximum récupérable

Système : air compris dans le bouteille. C'est un système fermé.

$$\left. \begin{array}{l} \text{État initial 1} \\ V_1 = 50 \text{ L} \\ p_1 = 50 \text{ bar} \\ T_1 = T_0 = 290 \text{ K} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{État fina 2} \\ V_2 \\ p_2 = p_0 = 1,0 \text{ bar} \\ T_2 = T_0 = 290 \text{ K} \end{array} \right\}$$

Le premier et le deuxième principe de la thermodynamique s'écrivent pour le système fermé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = W + Q \\ \Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T_0} + S_c \end{array} \right.$$

Il faut tenir compte du travail des forces de pression pour lutter contre la pression atmosphérique.

- Le travail élémentaire des forces de pression est $-p_{\text{ext}} dV$. La pression extérieure vaut ici p_0 . Le travail des forces de pression entre l'état 1 et l'état 2 vaut : $W_{\text{pression}} = -p_0(V_2 - V_1)$.
- Le travail autre que celui des forces de pression est noté W' .

Le travail algébriquement reçu par le système est :

$$W = -p_0(V_2 - V_1) + W'$$

En remplaçant Q par $\Delta U - W$ dans l'expression de ΔS , on a :

$$\Delta S - \frac{\Delta U - W}{T_0} = S_c$$

L'entropie créée est positive ou nulle. On a alors :

$$T_0 \Delta S - \Delta U - p_0(V_2 - V_1) + W' \geq 0$$

Soit :

$$-(\Delta U + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S) \geq -W'$$

On définit le potentiel thermodynamique $G^* = F^* + p_0 V = U - T_0 S + p_0 V$. On en déduit que :

$$-\Delta G^* \geq -W$$

Calcul du potentiel thermodynamique G^*

On a vu que le potentiel thermodynamique F^* vaut :

$$F^* = U_{\text{ref}} + C_V (T - T_{\text{ref}}) - T_0 \left(S_{\text{ref}} + C_P \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} \right)$$

On a alors :

$$G^* = U_{\text{ref}} + C_V (T - T_{\text{ref}}) - T_0 \left(S_{\text{ref}} + C_P \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} \right) + p_0 V$$

On en déduit la variation de G^* entre l'état 1 et l'état 2 :

$$\Delta G^* = G_2^* - G_1^* = T_0 \left(nR \ln \frac{p_2}{p_1} \right) + p_0 (V_2 - V_1)$$

Remarque

On peut en déduire ΔG^* à partir de ΔF^* :

$$\Delta G^* = \Delta F^* + \Delta (p_0 V)$$



On écrit l'équation d'état des gaz parfaits dans l'état 1 ($p_1 V_1 = nRT_0$) et dans l'état 2 ($p_2 V_2 = nRT_0$). On a alors :

$$\Delta G^* = -p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + p_0 \left(\frac{p_1}{p_2} V_1 - V_1 \right)$$

Le travail maximum récupérable vaut donc :

$$-\Delta G^* = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} - p_0 V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) = 7,3 \times 10^5 \text{ J}$$

Le travail maximum récupérable est plus faible dans la question 1 puisqu'une partie du travail a servi à lutter contre la pression atmosphérique.

Le travail maximum récupérable est obtenu pour une évolution réversible.

Exercice 16.2 : Travail maximum récupérable (PC)

On considère une masse $m = 500 \text{ g}$ d'eau qui passe de l'état 1 à l'état 2. Elle est en contact avec l'atmosphère à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ et à la pression $p_0 = 1 \text{ bar}$. Les parois entre la masse d'eau et l'atmosphère sont thermiquement conductrices.

On donne les tables thermodynamiques suivantes :

État 1 - eau à l'état gazeux : $T = 500 \text{ K}$; $p = 50 \text{ bar}$; $v = 0,02966 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$;
 $h = 2568 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s = 5534 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

État 2 - eau à l'état liquide : $T = 300 \text{ K}$; $p = 1 \text{ bar}$; $v = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$;
 $h = 112 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s = 391 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Calculer le travail maximum récupérable.

Analyse du problème

L'évolution est monotherme et monobare. On utilisera donc le potentiel thermodynamique G^* pour calculer le travail maximum récupérable.



Système fermé : masse m d'eau.

$$\left. \begin{array}{l} \text{État initial 1} \\ v_1 = 0,02966 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \\ p_1 = 50 \text{ bar} \\ T_1 = T_0 = 500 \text{ K} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{État final 2} \\ v_2 = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \\ p_2 = p_0 = 1,0 \text{ bar} \\ T_2 = T_0 = 300 \text{ K} \end{array} \right\}$$

Le premier et le deuxième principe de la thermodynamique s'écrivent pour le système fermé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = W + Q \\ \Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T_0} + S_c \end{array} \right.$$

Il faut tenir compte du travail des forces de pression puisque le volume varie

- Le travail élémentaire des forces de pression est $-p_{\text{ext}} dV$. La pression extérieure vaut ici p_0 . Le travail des forces de pression entre l'état 1 et l'état 2 vaut : $W_{\text{pression}} = -p_0(V_2 - V_1)$.
- Le travail autre que celui des forces de pression est noté W' .

Le travail algébriquement reçu par le système est :

$$W = -p_0(V_2 - V_1) + W'$$

En remplaçant Q par $\Delta U - W$ dans l'expression de ΔS , on a :

$$\Delta S - \frac{\Delta U - W}{T_0} = S_c$$

L'entropie créée est positive ou nulle. On a alors :

$$T_0\Delta S - \Delta U - p_0(V_2 - V_1) + W' \geq 0$$

Soit :

$$-(\Delta U + p_0\Delta V - T_0\Delta S) \geq -W'$$

On définit le potentiel thermodynamique $G^* = F^* + p_0V = U - T_0S + p_0V$.

On en déduit que :

$$-\Delta G^* \geq -W$$

Calcul du potentiel thermodynamique G^*

Le potentiel thermodynamique F^* vaut : $F^* = U - T_0S$.

Le potentiel thermodynamique G^* vaut : $G^* = F^* + p_0V$.

Dans les tables thermodynamiques, on connaît l'enthalpie définie par :

$$H = U + pV.$$

On a donc :

$$G^* = F^* + p_0V = U - T_0S + p_0V = H - pV - T_0S + p_0V$$



Il ne faut pas confondre les définitions de l'enthalpie libre G et du potentiel thermodynamique G^* .



En utilisant les grandeurs massiques, on a :

$$G^* = m(h - pv - T_0s + p_0v)$$

La variation de G^* entre l'état 1 et l'état 2 :

$$\Delta G^* = G_2^* - G_1^* = m(h_2 - p_2v_2 - T_0s_2 + p_0v_2) - m(h_1 - p_1v_1 - T_0s_1 + p_0v_1)$$

Le travail maximum récupérable vaut donc :

$$-\Delta G^* = 3,8 \times 10^5 \text{ J}$$

Le travail maximum récupérable est obtenu pour une évolution réversible.

Corps pur sous deux phases

Exercice 17.1 : Machine frigorifique (PC)

On étudie le cycle de l'eau d'une machine frigorifique. La capacité thermique massique de l'eau liquide est c . La température critique de l'eau est $T_{cr} = 647$ K. L'eau dans l'état D est à la température $T_1 = 288$ K sur la courbe de rosée. L'eau subit les transformations réversibles suivantes :

- DA : condensation isotherme à la température T_1 . L'eau dans l'état A est sur la courbe d'ébullition.
- AB : détente adiabatique réversible. L'eau dans l'état B est à la température $T_0 = 268$ K. Le titre massique en vapeur au point B est noté x_B .
- BC : vaporisation isotherme. Le titre massique en vapeur au point C est noté x_C .
- CD : compression adiabatique réversible.

Les enthalpies massiques de vaporisation pour les températures T_0 et T_1 sont notées respectivement l_0 et l_1 .

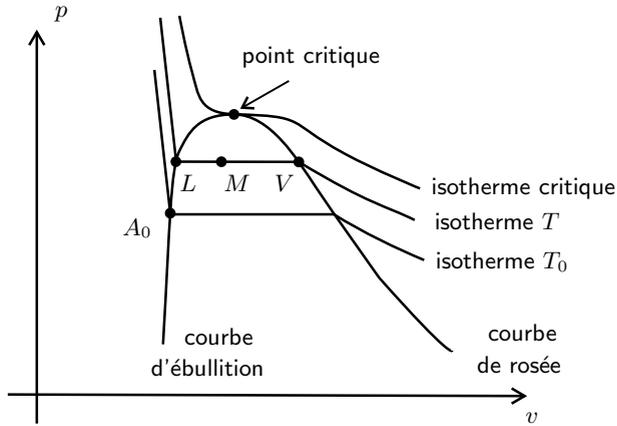
1. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron. Déterminer les titres massiques en vapeur x_B et x_C en fonction de c, T_0, T_1, l_0 et l_1 .
2. Déterminer les transferts thermiques massiques reçus par l'eau au cours des transformations BC et DA . Déterminer le travail massique reçu par l'eau au cours du cycle.
3. La machine frigorifique consomme du travail et prélève un transfert thermique à la source froide (température T_0). Calculer l'efficacité de la machine frigorifique.

Analyse du problème

Il faut être très attentif lors de la lecture de l'énoncé : bien identifier les paliers de pression et regarder si l'énoncé donne des tables thermodynamiques complètes ou incomplètes. On retrouve l'efficacité de Carnot puisqu'on a une machine cyclique ditherme constituée de 2 isothermes et 2 adiabatiques réversibles.

Cours :

On représente souvent le diagramme de Clapeyron représentant la pression p en fonction du volume massique v du corps pur.



1. Étude thermodynamique avec des tables complètes ou des diagrammes thermodynamiques

On connaît les enthalpies, entropies massiques du liquide saturant et de la vapeur saturante pour différentes températures. On utilisera très souvent le théorème des moments avec l'entropie massique, l'enthalpie massique ou le volume massique. Si dans une transformation, l'entropie joue un rôle important (exemple adiabatique réversible, donc isentropique), on utilisera le théorème des moments avec s :

$$x_V = \frac{s - s_L}{s_V - s_L} = \frac{LM}{LV}$$

On utilisera également une relation qui est dérivée du théorème des moments : $s = x_V s_V + (1 - x_V) s_L$.

De même, on peut écrire : $x_V = \frac{h - h_L}{h_V - h_L} = \frac{LM}{LV}$ et $x_V = \frac{v - v_L}{v_V - v_L} = \frac{LM}{LV}$.

2. Étude thermodynamique avec des tables incomplètes

Si l'énoncé donne des tables thermodynamiques incomplètes, on utilisera des modèles approchés. Souvent, on donne c la capacité thermique massique du liquide. On prendra alors le modèle du liquide incompressible. On appelle l la chaleur latente massique de vaporisation (notée parfois dans les exercices l_v ou L) à la température T .

Variation d'enthalpie massique entre A_0 et L :

Pour un liquide incompressible, on a : $dh = cdT$. On en déduit que :

$$\Delta h_{A_0 \rightarrow L} = c(T - T_0)$$

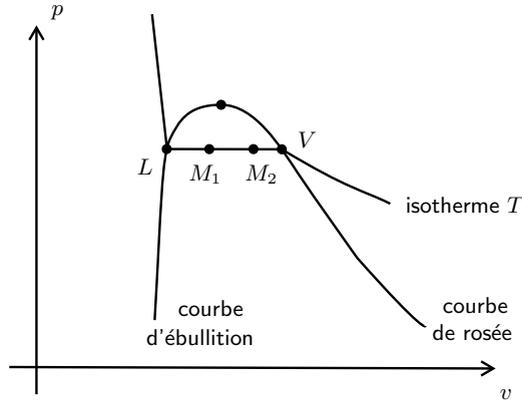
Le liquide est incompressible, donc le volume massique v est quasiment constant.

Cours : On a donc : $du \approx c dT$ et $du = T ds - p dv \approx T ds$.

On obtient : $ds = c \frac{dT}{T}$. On intègre entre T_0 et T :

$$\Delta s_{A_0 \rightarrow L} = c \ln \frac{T}{T_0}$$

Variation d'enthalpie massique entre M_1 et M_2 sur le palier :



On se déplace sur le palier d'équilibre liquide-vapeur du point M_1 au point M_2 .

En un point M du palier, on a : $h_M = x_V h_V + (1 - x_V) h_L$.

Au point M_1 , on a : $h_1 = x_{V1} h_V + (1 - x_{V1}) h_L$.

Au point M_2 , on a : $h_2 = x_{V2} h_V + (1 - x_{V2}) h_L$.

On a donc : $h_2 - h_1 = x_{V2} (h_V - h_L) - x_{V1} (h_V - h_L)$. La chaleur latente massique de vaporisation est définie par $l_V = h_V - h_L$. On a donc :

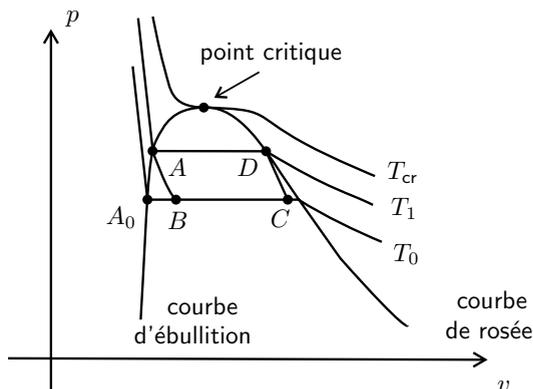
$$h_2 - h_1 = (x_{V2} - x_{V1}) l_V (T)$$

L'identité thermodynamique sur le palier ($p = \text{cte}$) s'écrit : $dh = T ds + v dp = T ds$. On

en déduit que : $s_2 - s_1 = \frac{(x_{V2} - x_{V1}) l_V (T)}{T}$



1. Le diagramme de Clapeyron est le diagramme (p, v).



La transformation AB est isentropique :

On choisit le chemin AA_0B car l'entropie S est une fonction d'état. La variation d'entropie entre A et B ne dépend pas du chemin suivi :

$$S_B - S_A = (S_B - S_{A0}) + (S_{A0} - S_A)$$

On considère une masse m d'eau. L'entropie massique est définie par $s = \frac{S}{m}$.

On en déduit que :

$$s_B - s_A = 0 = (s_B - s_{A0}) + (s_{A0} - s_A) = x_B \frac{l_0}{T_0} + c_l \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) = 0$$

Ce qui donne :

$$x_B = \frac{T_0}{l_0} c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

La transformation CD est isentropique :

On choisit le chemin CA_0AD . On a donc :

$$\begin{aligned} s_D - s_C = 0 &= (s_D - s_A) + (s_A - s_{A0}) + (s_{A0} - s_C) \\ &= -x_C \frac{l_0}{T_0} + c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{l_1}{T_1} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$x_C = \frac{T_0}{l_0} c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{T_0}{T_1} \frac{l_1}{l_0}$$

2. On considère une masse m d'eau qui décrit le cycle $ABCD$.

Calcul de $q_{B \rightarrow C}$:

La transformation $B \rightarrow C$ est isobare. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour le système fermé en grandeurs massiques :

$$\Delta h_{B \rightarrow C} = q_{B \rightarrow C} = q_0$$

Le transfert thermique massique q_0 reçu au cours de cette transformation est :

$$q_0 = (x_C - x_B) l_0 = \frac{T_0}{T_1} l_1$$

Calcul de $q_{D \rightarrow A}$:

La transformation $D \rightarrow A$ est isobare. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour le système fermé en grandeurs massiques :

$$\Delta h_{D \rightarrow A} = q_{D \rightarrow A} = q_1$$

Le transfert thermique massique q_1 reçu au cours de cette transformation est :

$$q_1 = -l_1$$

Calcul de w :

Pour calculer le travail massique reçu au cours du cycle, il faut écrire le premier principe de la thermodynamique sur un cycle :

$$0 = w + q_0 + q_1$$

On a alors :

$$w = -q_0 - q_1$$

3. L'efficacité est définie par :

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{dépense}} = \frac{q_0}{w}$$

On a donc :

$$\eta = -\frac{q_0}{q_1 + q_0} = -\frac{\frac{T_0}{T_1} l_1}{-l_1 + \frac{T_0}{T_1} l_1} = -\frac{T_0}{T_1} \frac{T_1}{T_0 - T_1}$$

d'où :

$$\eta = \frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 13,4$$

On retrouve bien l'efficacité de Carnot puisqu'on a une machine cyclique ditherme réversible.

Remarque

En pratique le point C doit se trouver sur la courbe de rosée pour avoir une compression monophasique. Pour ne pas avoir des gouttes de liquide dans le compresseur, on réalise même une surchauffe de la vapeur avant d'entrer dans le compresseur. Cette surchauffe se fait à pression constante. On arrive à un point C' dans le domaine de la vapeur sèche.

Exercice 17.2 : Cycle de Rankine (PC)

Le cycle de Rankine est le cycle de base des centrales nucléaires. La pompe d'alimentation porte l'eau liquide saturante (état 0) de la basse pression p_0 du condenseur à la pression p_1 du générateur de vapeur (GV) de façon adiabatique réversible (état 1). L'eau liquide comprimée entre ensuite dans le générateur de vapeur, isobare, où elle est chauffée jusqu'à la température T_2 du changement d'état (état 1'), puis totalement vaporisée (état 2). La vapeur saturante sèche produite subit ensuite une détente adiabatique réversible (2-3) dans une turbine. Le fluide pénètre ensuite dans le condenseur isobare pour y être totalement condensé (état 0) à la température T_1 . On appelle T_{cr} la température critique de l'eau. On négligera le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. On admet que $h_1 = h_0$. On donne : $T_1 = 30 \text{ °C}$; $T_2 = 300 \text{ °C}$ et $T_{cr} = 374 \text{ °C}$.

On rappelle que pour un système ouvert constitué par le fluide contenu dans un des composants du cycle, recevant un travail indiqué massique w_i (travail autre que celui des forces de pression) et un transfert thermique massique q , le premier principe de la thermodynamique s'écrit en régime permanent : $\Delta h = w_i + q$.

Extraits de tables thermodynamiques pour l'eau sur le palier d'équilibre liquide-vapeur :

Liquide saturant à $p_1 = 85,9 \text{ bar}$ et 300 °C : $s = 3,24 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
 $h = 1345 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Liquide saturant à $p_0 = 0,04 \text{ bar}$ et 30 °C : $s = 0,44 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $h = 126 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Vapeur saturante sèche à $85,9 \text{ bar}$ et 300 °C : $s = 5,57 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
 $h = 2749 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Vapeur saturante sèche à $0,04 \text{ bar}$ et 30 °C : $s = 8,46 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
 $h = 2566 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

1. Représenter l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme de Clapeyron.

2. Déterminer le titre massique et l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine.

3. Calculer l'efficacité du cycle $\eta = \frac{-w_{\text{turbine}}}{q_{GV}}$.

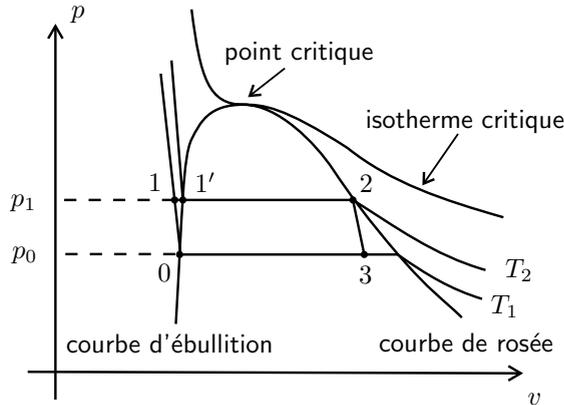
4. Dans quel état se trouve le fluide à la fin de la détente dans la turbine ? Pourquoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la machine ?

Analyse du problème

Il faut être très attentif lors de la lecture de l'énoncé : bien identifier les paliers de pression et regarder si l'énoncé donne des tables thermodynamiques complètes ou incomplètes. L'efficacité n'est pas égale à l'efficacité de Carnot puisqu'on n'a pas une machine cyclique ditherme réversible. Il faut bien remarquer qu'une transformation isobare n'est pas nécessairement réversible.



1. Le diagramme de Clapeyron est le diagramme (p, v) .



2. La transformation $2 \rightarrow 3$ est adiabatique réversible, donc isentropique. On a alors :

$$s_3 = s_2 = s_V(T_2) = 5,57 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

On utilise le théorème des moments sur le palier d'équilibre liquide-vapeur à la température T_1 . Le titre massique en vapeur au point 3 est :

$$\begin{aligned} x_V &= \frac{LM}{LV} = \frac{s_3 - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} = \frac{s_V(T_2) - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} \\ &= \frac{5,57 - 0,44}{8,46 - 0,44} = 0,64 \end{aligned}$$

On en déduit l'enthalpie massique au point 3 :

$$h_3 = x_V h_V(T_1) + (1 - x_V) h_L(T_1) = 1687,6 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3. Premier principe de la thermodynamique à la transformation $2 \rightarrow 3$:

$$h_3 - h_2 = w_{it}$$

puisque la turbine est calorifugée. w_{it} est le travail indiqué massique reçu par le fluide. Il est toujours négatif pour une turbine.

Premier principe de la thermodynamique à la transformation $1 \rightarrow 2$:

$$h_2 - h_1 = q_{GV}$$

puisque'il n'y a pas de partie mobile de la machine, c'est-à-dire pas de travail autre que celui des forces de pression.

Calcul de l'efficacité :

$$\eta = \frac{-w_{\text{turbine}}}{q_{GV}} = \frac{-(h_3 - h_2)}{(h_2 - h_1)} = \frac{-(1687,6 - 2749)}{2749 - 126} = 40,5\%$$

4. D'après le diagramme (p, v) , la vapeur est saturante à la fin de la détente. Il y a donc des conditions difficiles pour les parties mobiles de la machine à cause de la corrosion.

Remarque

Le cycle de Rankine malgré les inconvénients d'un mélange humide est utilisé dans la marine : propulsion des sous-marins nucléaires, porte-avion Charles de Gaulle. Une contrainte importante est d'avoir une chaufferie la plus fiable et la plus compacte possible. Par contre, la turbine est très sensible à la corrosion.

Exercice 17.3 : Diagramme (p, T) et relation de Clapeyron (PC)

On appelle l_F , l_V et l_S respectivement les enthalpies massique de fusion, vaporisation et sublimation pour l'eau. La masse molaire de l'eau est notée M_{eau} . On supposera que le volume massique de la vapeur d'eau est très grand devant le volume massique de l'eau à l'état solide et liquide.

Extrait des tables thermodynamiques :

Point triple de l'eau : $T_{\text{tr}} = 273,16 \text{ K}$; $p_{\text{tr}} = 6 \times 10^{-3} \text{ bar}$.

Point critique de l'eau : $T_C = 374^\circ\text{C}$; $p_C = 220 \text{ bar}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

1. Rappeler la relation de Clapeyron.

2. Représenter graphiquement le diagramme (p, T) pour l'eau. Quel est le signe la pente de la courbe de fusion ?

3. Quelle relation a-t-on entre les enthalpies massiques de changement d'état au point triple ? Montrer qu'au point triple $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{sub}} > \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{vap}}$.

4. On suppose qu'entre T_{tr} et 150°C , on peut utiliser le modèle du gaz parfait et que l'enthalpie massique de vaporisation est constante. Déterminer la pression de vapeur saturante P_S en fonction de la température T pour l'équilibre liquide-vapeur.

Analyse du problème

La relation de Clapeyron permet d'expliquer le signe de la pente de la courbe de fusion. On peut également déterminer la pression en fonction de la température sur la courbe de changement d'état.



1. La relation de Clapeyron est :

$$l_{1 \rightarrow 2} = T (v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}$$

$l_{1 \rightarrow 2}$ désigne la chaleur latente massique de changement d'état de la phase 1 à la phase 2.

T et p désignent respectivement la température et la pression du changement d'état.

v_1 et v_2 désignent les volumes massiques des phases 1 et 2.

$\frac{dp}{dT}$ est la pente de la courbe $p = f(T)$ dans le diagramme (p, T) .

2. La masse volumique de l'eau à l'état solide est plus petite que la masse volumique de l'eau liquide. Le volume massique de l'eau à l'état solide est donc plus grand que le volume massique de l'eau liquide.

Il faut fournir de l'énergie pour passer de l'état solide à l'état liquide, donc $l_F > 0$.

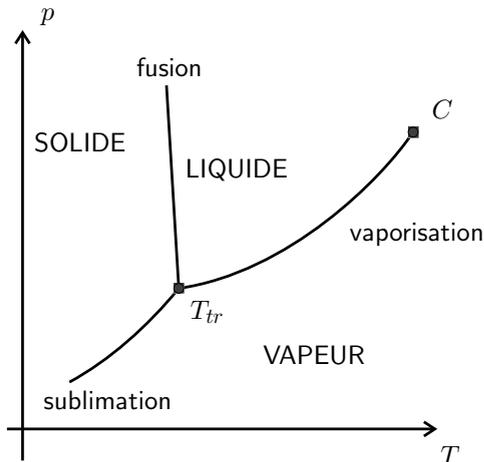
La formule de Clapeyron s'écrit pour la fusion :

$$l_F = T (v_L - v_S) \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fusion}}$$

Comme $l_F > 0$ et $v_L - v_S < 0$, on en déduit que :

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fusion}} < 0$$

Le diagramme (p, T) pour l'eau est :



Remarque : Le cas le plus général est celui où la pente de la courbe de fusion est positive.

3. Au point triple y , les trois états solide, liquide et vapeur peuvent coexister. La variance vaut 0. On a :

$$h_V(T_y) - h_S(T_y) = \{h_V(T_y) - h_L(T_y)\} + \{h_L(T_y) - h_S(T_y)\}$$

On en déduit immédiatement qu'au point triple :

$$l_S(T_y) = l_F(T_y) + l_V(T_y)$$

Les enthalpies de sublimation, fusion et vaporisation sont positives. Au point triple, les relations de Clapeyron s'écrivent :

$$\begin{cases} l_S(T_y) = T(v_V - v_S) \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{sub}} \approx T v_V \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{sub}} \\ l_V(T_y) = T(v_V - v_L) \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{vap}} \approx T v_V \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{vap}} \end{cases}$$

Comme $l_S(T_y) > l_V(T_y)$, alors

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{sub}} > \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{vap}}$$

4. Comme $v_L \ll v_V$, la relation de Clapeyron s'écrit :

$$l_V = T v_V \frac{dp_s}{dT}$$

La masse volumique de la vapeur d'eau est :

$$\mu = \frac{p_s M_{\text{eau}}}{RT}$$

On en déduit le volume massique de la vapeur d'eau :

$$v_V = \frac{V_V}{m_V} = \frac{1}{\mu} = \frac{RT}{p_s M_{\text{eau}}}$$

On en déduit :

$$l_V = T \frac{RT}{p_s M_{\text{eau}}} \frac{dp_s}{dT}$$

On sépare les variables :

$$\frac{dp_s}{p_s} = \frac{L M_{\text{eau}}}{RT^2} dT$$

En intégrant entre T_y et T , on obtient :

$$\ln \frac{p_S(T)}{p_{tr}} = -\frac{LM_{eau}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_y} \right)$$

Remarque : Cette formule approchée donne des résultats à 1% près pour l'eau avec des températures comprises entre 0°C et 150°C.

Exercice 17.4 : Surfusion (PC)

Une masse d'eau de 500 g se trouve à l'état liquide dans un thermostat à -5°C , sous la pression atmosphérique normale. On fait cesser cet état d'équilibre métastable en ajoutant un germe de glace à l'eau.

Extrait des tables thermodynamiques :

Enthalpie massique de fusion de la glace à 0°C : $l_F = 336 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_L = 4,2 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Capacité thermique massique de la glace : $c_G = 2,1 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1. Qu'appelle-t-on la surfusion ?

2. Effectuer un bilan d'entropie. Calculer l'entropie créée.

Analyse du problème

Le bilan d'entropie se fait en trois étapes : calcul de la variation d'entropie, de l'entropie échangée et de l'entropie créée. Comme l'entropie est une fonction d'état, la variation d'entropie entre l'état initial et l'état final ne dépend pas du chemin suivi. On utilisera un autre chemin pour aller de l'état initial vers l'état final pour calculer la variation d'entropie.



1. La surfusion est l'état d'un système qui reste en phase liquide alors que sa température est plus basse que son point de fusion. C'est un état métastable, c'est-à-dire qu'une petite perturbation suffit pour déclencher le changement d'état liquide-solide.

2. Le système fermé étudié est l'eau de masse $m = 500 \text{ g}$.

État initial I		État final F
eau liquide	\rightarrow	eau solide
$T_S = -5^\circ\text{C} = 268 \text{ K}$		$T_S = -5^\circ\text{C} = 268 \text{ K}$

Calcul de la variation d'entropie

On envisage le chemin $I \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow F$ pour aller de l'état initial à l'état final.

État initial I		État 1		État 2
eau liquide	\rightarrow	eau liquide	\rightarrow	eau solide
$T_S = -5^\circ\text{C} = 268 \text{ K}$		$T_0 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$		$T_0 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{État final } F \\ \text{eau solide} \\ T_S = -5^\circ\text{C} = 268 \text{ K} \end{array} \right.$$

La variation d'entropie entre l'état initial et l'état final est :

$$\Delta S_{I \rightarrow F} = \Delta S_{I \rightarrow 1} + \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow F}$$

Toutes les transformations se font à pression constante :

- Pour le liquide : $dH = TdS + Vdp = TdS = mc_L dT$, d'où

$$dS = mc_L \frac{dT}{T}.$$

On obtient :

$$\Delta S_{I \rightarrow 1} = mc_L \ln \frac{T_0}{T_S}$$

- Pour le changement d'état à température et pression constante : $dH = T_0 dS + Vdp = T_0 dS$, soit :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{-ml_F}{T_0}$$

- Pour le solide :

$$dH = TdS + Vdp = TdS = mc_G dT, \text{ d'où } dS = mc_G \frac{dT}{T}.$$

On obtient :

$$\Delta S_{2 \rightarrow F} = mc_G \ln \frac{T_S}{T_0}$$



Il ne faut pas oublier le signe (-) car on a un changement d'état liquide-solide. Il faut bien mettre les températures en kelvin pour effectuer les applications numériques.



On obtient finalement :

$$\Delta S_{I \rightarrow F} = mc_L \ln \frac{T_0}{T_S} - \frac{ml_F}{T_0} + mc_G \ln \frac{T_S}{T_0} = -596 \text{ J.K}^{-1}$$

Calcul de l'entropie échangée

L'entropie échangée est :

$$S_e = \frac{Q}{T_S}$$

Pour calculer Q , on applique le premier principe à la masse d'eau. La transformation est isobare. On a donc :

$$\Delta H_{I \rightarrow F} = Q$$

On utilise le même chemin que dans la question précédente :

$$\Delta H_{I \rightarrow F} = \Delta H_{I \rightarrow 1} + \Delta H_{1 \rightarrow 2} + \Delta H_{2 \rightarrow F}$$

On a alors :

$$Q = \Delta H_{I \rightarrow F} = mc_L (T_0 - T_S) - ml_F + mc_G (T_S - T_0) = -163 \text{ kJ}$$

L'entropie échangée est donc :

$$S_e = \frac{Q}{T_S} = -607 \text{ J.K}^{-1}$$

Calcul de l'entropie créée

L'entropie créée est définie par : $\Delta S = S_e + S_c$.

L'entropie créée vaut donc :

$$S_c = \Delta S - S_e = 11 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

L'entropie créée est positive. La transformation est donc irréversible. Les causes d'irréversibilité sont les transferts thermiques qui se font entre des corps à des températures différentes.

Partie 8

Optique ondulatoire

Plan

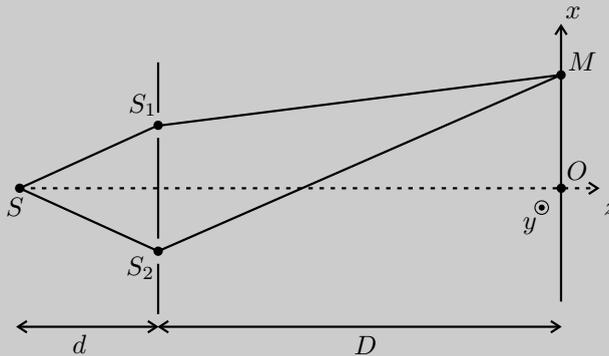
18. Interférences	307
18.1 : Fentes d'Young et largeur de la source (PC-PSI)	307
18.2 : Étoiles à l'infini et fentes d'Young (PC-PSI)	313
18.3 : Michelson en lame d'air (PC-PSI)	316
18.4 : Michelson en coin d'air (PC-PSI)	319
18.5 : Michelson et doublet du sodium (PC-PSI)	323
18.6 : Michelson et raie à profil rectangulaire (PC-PSI)	327
18.7 : Détermination de l'indice de l'air (PC-PSI)	330
18.8 : Vélocimétrie laser (PC-PSI)	333
19. Diffraction	337
19.1 : Diffraction par une fente fine (PC-PSI)	337
19.2 : Diffraction par deux fentes fines (PC-PSI)	341
19.3 : Diffraction par une fente rectangulaire (PC-PSI)	346
19.4 : Translation de la source et de la fente fine (PC-PSI)	349
19.5 : Trous d'Young avec lame – Holographie* (PC-PSI)	352
19.6 : Diffraction par un réseau (PC-PSI)	357

Interférences

Exercice 18.1 : Fentes d'Young et largeur de la source (PC-PSI)

On considère deux fentes S_1 et S_2 identiques, distantes de a et très fines. Les distances D et d sont très grandes devant a . L'indice de l'air vaut 1. La source de lumière de longueur d'onde dans le vide λ_0 est placée en S .

1. Comment s'appelle le dispositif ?
2. Démontrer la formule des interférences à deux ondes.
3. Calculer l'éclairement en un point M de l'écran. Que vaut l'interfrange ?
4. On tient compte de la largeur b de la source S . Représenter graphiquement le contraste de la figure d'interférences en fonction de b .



Analyse du problème

Cet exercice traite du montage classique des fentes d'Young avec un objet à distance finie. On étudie l'influence de la largeur de la source sur le contraste. On observe un brouillage de la figure d'interférences avec une source large.

Cours : Une onde monochromatique peut se mettre sous la forme :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \phi(M))$$

La notation complexe s'écrit :

$$\underline{s}(M, t) = A(M) \exp(i(\phi(M) - \omega t))$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}(M) = A(M) \exp(i\phi(M))$$



Attention : on peut rencontrer dans les exercices une autre convention : $\underline{s} = A \exp(i(\omega t - \phi))$ au lieu de $\underline{s} = A \exp(-i(\omega t - \phi))$. L'amplitude complexe s'écrit alors : $\underline{a} = A \exp(-i\phi)$

Cours : L'éclairement est défini : $\varepsilon(M) = K \underline{a}(M) \underline{a}^*(M)$. K est un coefficient de proportionnalité que l'on prend parfois égal à 1 dans certains exercices.

Dans un milieu homogène et isotrope, l'énergie lumineuse se propage de façon rectiligne selon des directions que l'on appelle rayons lumineux.

On rencontre deux dispositifs pour obtenir deux ondes à partir d'une seule onde :

- division du front d'onde : les deux ondes proviennent de rayons lumineux différents issus de la source avec une division géométrique.
- division d'amplitude : les deux ondes proviennent du même rayon lumineux issu de la source dédoublé ultérieurement par une division énergétique.

Le chemin optique entre A et B dans un milieu homogène d'indice n est noté L_{AB} ou $[AB]$. Il est égal à :

$$[AB] = nAB$$

Deux ondes peuvent interférer si elles sont cohérentes, c'est à dire qu'elles doivent avoir la **même pulsation**, provenir de la **même source principale** (division du front d'onde ou division d'amplitude) et du **même train d'onde** (la différence de marche doit être inférieure à la longueur de cohérence).

Dans le cas où les ondes sont incohérentes, on fait la somme de leurs éclairagements.

Dans le cas où les ondes sont cohérentes, on fait la somme de leurs amplitudes. L'éclairement est donné par la formule des interférences :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M) + 2\sqrt{\varepsilon_1(M)\varepsilon_2(M)} \cos(\Delta\phi(M))$$

$\Delta\phi$ est le déphasage entre l'onde 2 et l'onde 1. On peut l'exprimer avec la différence de marche au point M :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

L'ordre d'interférence est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

On rencontre très souvent le cas particulier où les deux ondes ont le même éclairement ε_0 . La formule des interférences s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 (1 + \cos(\Delta\phi(M)))$$



1. C'est un dispositif à division du front d'onde puisque les deux ondes proviennent de rayons lumineux différents issus de la source S avec une division géométrique.

2. Amplitude complexe de l'onde 1 :

Au point M , la vibration de l'onde 1 est : $s_1 = A_1 \cos(\omega t - \phi_1)$.

La vibration complexe est : $\underline{s}_1 = A_1 \exp(-i(\omega t - \phi_1))$.

L'amplitude complexe est : $\underline{a}_1 = A_1 \exp(i\phi_1)$.

Amplitude complexe de l'onde 2 :

Au point M , la vibration de l'onde 2 est : $s_2 = A_2 \cos(\omega t - \phi_2)$.

L'amplitude complexe est : $\underline{a}_2 = A_2 \exp(i\phi_2)$.

Amplitude totale :

Pour des ondes cohérentes, on fait la somme des amplitudes complexes :

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = A_1 \exp(i\phi_1) + A_2 \exp(i\phi_2)$$

L'éclairement est :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= K \underline{a} \underline{a}^* \\ &= K (A_1 \exp(i\phi_1) + A_2 \exp(i\phi_2)) (A_1 \exp(-i\phi_1) + A_2 \exp(-i\phi_2)) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\varepsilon = K (A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \exp(i(\phi_2 - \phi_1)) + A_1 A_2 \exp(-i(\phi_2 - \phi_1)))$$

On pose $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, soit :

$$\varepsilon = K A_1^2 + K A_2^2 + 2K A_1 A_2 \cos(\Delta\phi)$$

Finalement, on obtient :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\Delta\phi)$$

Dans le cas particulier très fréquent où les deux ondes ont le même éclairement ε_0 , on a :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 (1 + \cos(\Delta\phi(M)))$$

3. La différence de marche est :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= [SS_2M] - [SS_1M] = n_{\text{air}} ((SS_2M) - (SS_1M)) \\ &= (SS_2M) - (SS_1M) \end{aligned}$$

puisque l'indice de l'air vaut 1.

Comme $SS_1 = SS_2$, alors $\delta(M) = S_2M - S_1M$

$$S_1 \begin{vmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix} ; S_2 \begin{vmatrix} -a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix} ; M \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{On a donc : } S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}}$$

On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$S_1M \simeq D \left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right)$$

De même, on obtient :

$$S_2M = D\sqrt{1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}} = D\left(1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right).$$

La différence de marche est :

$$\delta(M) = \left(D\left(1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right) - D\left(1 + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right)\right)$$

Soit :

$$\delta(M) = D\left(\frac{x^2 + \frac{a^2}{4} + ax}{2D^2}\right) - D\left(\frac{x^2 + \frac{a^2}{4} - ax}{2D^2}\right) = \frac{ax}{D}$$

L'ordre d'interférence est :

$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 D}$$



Il faut connaître ce résultat par coeur et être capable de le redémontrer très rapidement.



La formule des interférences à deux ondes donne :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{p}{\lambda_0}\right)\right)$$

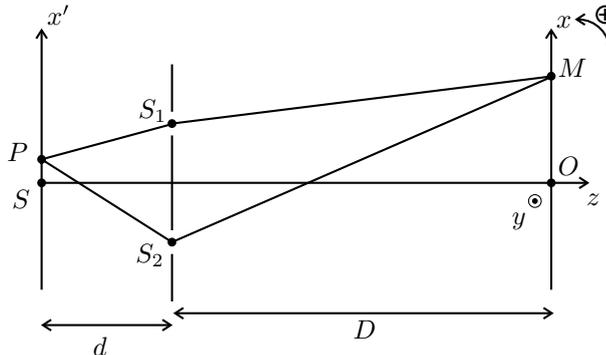
On a donc des franges rectilignes perpendiculaires à Ox car à p fixé, x est fixé. Pour calculer l'interfrange, on utilise la relation : $p(x + i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x + i) = p(x) - 1$.



On a donc : $\frac{a(x + i)}{\lambda_0 D} = \frac{ax}{\lambda_0 D} + 1$, ce qui donne : $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$

4.





Attention au paramétrage. Il faut prendre l'initiative de définir un point P d'abscisse x' et considérer un élément de longueur dx' centré sur P . On peut alors appliquer la formule des interférences à deux ondes pour dx' .



La différence de marche entre les deux rayons lumineux est :

$$\begin{aligned}\delta &= [PS_2M] - [PS_1M] = (PS_2M) - (PS_1M) \\ &= \{PS_2 - PS_1\} + \{S_2M - S_1M\}\end{aligned}$$

On a vu dans la question précédente que : $S_2M - S_1M \approx \frac{ax}{D}$.

De même, on a : $PS_2 - PS_1 = \frac{ax'}{d}$.

La différence de marche vaut donc :

$$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d}$$

La fente source a une largeur b . Il faut considérer un élément de longueur dx' autour de P . La contribution de l'éclairement dû à dx' au point M est :

$$d\varepsilon(M) = 2A_0 dx' \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

Il reste à intégrer x' entre $-\frac{b}{2}$ et $\frac{b}{2}$ pour calculer l'éclairement total au point M .

Remarque : on fait la somme des éclairements puisque les différents éléments dx' sont des sources incohérentes.



On a donc :

$$\varepsilon(M) = \int_{x_F - \frac{b}{2}}^{x_F + \frac{b}{2}} 2A_0 dx' \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d}\right)\right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon(M) = 2A_0 b + \left[\frac{2A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d}\right)\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 d}} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

D'où :

$$\varepsilon(M) = 2A_0 b + \frac{A_0 \lambda_0 d}{\pi a} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a\left(\frac{b}{2}\right)}{d}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a\left(-\frac{b}{2}\right)}{d}\right)\right) \right]$$

Or $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, d'où :

$$\varepsilon(M) = 2A_0b + \frac{A_0\lambda_0d}{\pi a} 2 \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}\right)\right)$$

On pose $\Gamma = \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right)}{\frac{\pi ab}{\lambda_0d}}$

L'éclairement s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon(M) = 2A_0b \left(1 + \Gamma \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}\right)\right) \right)$$

Si b est très petit, la fonction sinus-cardinal vaut 1. On retrouve la formule classique des interférences de la question 1.

Si on fait varier x , le terme dans le cosinus est un terme variable alors que le terme dans le sinus cardinal est un terme constant.

Le contraste de la figure d'interférences est défini par :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$$

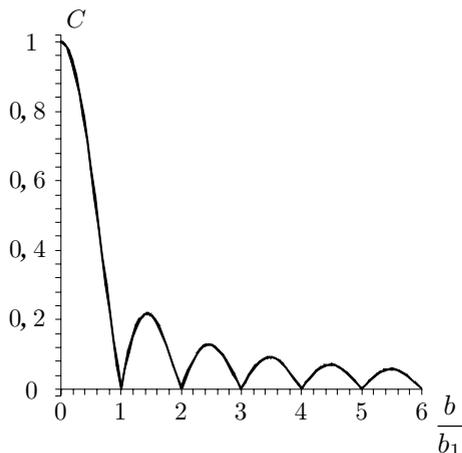
Lorsque x varie, on a : $\varepsilon_{\max} = 2A_0b(1 + |\Gamma|)$ et $\varepsilon_{\min} = 2A_0b(1 - |\Gamma|)$

D'où :
$$C = \frac{(1 + |\Gamma|) - (1 - |\Gamma|)}{(1 + |\Gamma|) + (1 - |\Gamma|)} = |\Gamma| = \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) \right|$$

Quand le contraste diminue, on a des franges de moins en moins contrastées. Pour $C = 0$, on ne peut plus faire la différence entre les franges brillantes et les franges sombres.

Le contraste est nul pour $\left| \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) \right| = 0$, soit $\frac{\pi ab}{\lambda_0d} = n\pi$ avec n entier.

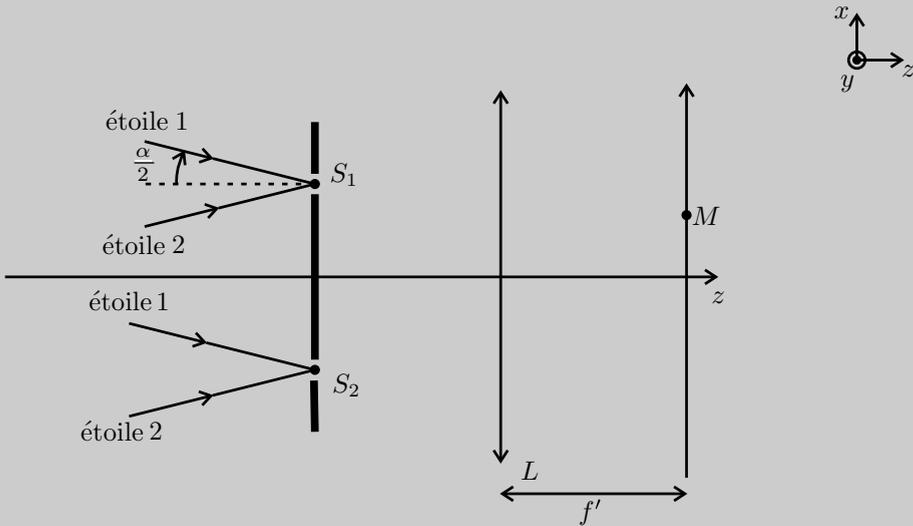
Le premier brouillage a lieu pour pour $n = 1$, soit $b_1 = \frac{\lambda_0d}{a}$. Les autres ont lieu pour $b_n = nb_1$.



Exercice 18.2 : Étoiles à l'infini et fentes d'Young (PC-PSI)

On considère deux étoiles à l'infini faisant entre elles un angle α très faible, de même éclairement ϵ_0 . La lumière est diffractée par deux fentes S_1 et S_2 identiques, distantes de a et très fines. Un écran est placé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f' située après les fentes d'Young.

1. Calculer l'éclairement dû à chaque étoile en un point M de l'écran.
2. Déterminer le contraste de la figure d'interférences et en déduire pour quelles valeurs de a on observe un brouillage.



Analyse du problème

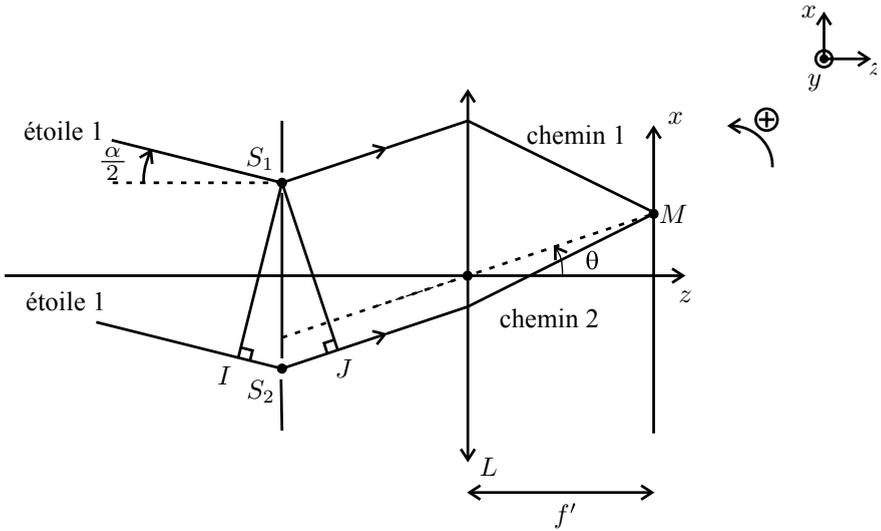
Cet exercice étudie le montage classique des fentes d'Young avec deux étoiles à l'infini. Dans l'exercice précédent, l'écran était placé à grande distance des fentes d'Young alors que dans cet exercice, il est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente.



1. Chaque étoile donne un système d'interférences par le dispositif des fentes d'Young. Comme l'étoile 1 est à l'infini, on peut considérer qu'au voisinage des fentes d'Young, on a une onde plane. $S_1 I$ est un plan d'onde, donc $[objet_1 S_1] = [objet_1 I]$. D'après le principe de retour inverse de la lumière, $S_1 J$ est aussi un plan d'onde (une lentille ne modifie pas la différence de marche) :

$$[S_1 M] = [J M]$$

D'après l'énoncé, $\alpha \ll 1$. Comme on travaille dans les conditions de Gauss, alors $\theta \ll 1$ et $\tan \theta = \theta = \frac{x}{f'}$.



⚠ Attention aux signes : $\alpha < 0$ et $\theta > 0$ sur la figure.



La différence de marche est :

$$\delta = IS_2 + S_2J = -a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}$$

puisque $\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \approx -\frac{\alpha}{2} = \frac{IS_2}{S_1S_2} = \frac{IS_2}{a}$ et $\tan(\theta) \approx \theta = \frac{S_2J}{S_1S_2} = \frac{S_2J}{a}$

L'éclairement au point M dû à l'étoile 1 est :

$$\varepsilon_1(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon_1(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}\right)\right) \right)$$

On en déduit directement l'éclairement dû à l'étoile 2 en remplaçant α par $-\alpha$:

$$\varepsilon_2(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}\right)\right) \right)$$

2. Les objets sont incohérents. On fait donc la somme des éclairements :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M)$$

L'éclairement total est :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}\right)\right) \right)$$

On utilise les formules de trigonométrie :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

On a alors :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon(M) = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \right)$$

On pose :

$$\Gamma = \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)$$

L'éclairement s'écrit :

$$\varepsilon(M) = 4\varepsilon_0 \left(1 + \Gamma \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \right)$$

Le contraste est par définition :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$$

Lorsque x varie, le terme $\Gamma = \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)$ est constant alors que le terme $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right)$ varie de -1 à 1 . On peut donc en déduire les valeurs minimales et maximales de l'éclairement :

$$\varepsilon_{\max} = 4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\min} = 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|).$$

D'où :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \frac{4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) - 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|)}{4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) + 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|)} = |\Gamma|$$

On a un brouillage si $C = 0$, soit $\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. On a alors :

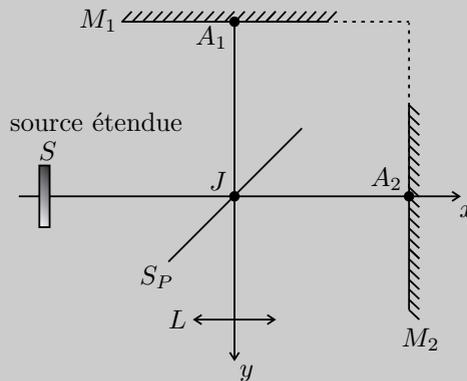
$$a = \frac{\lambda_0}{2\alpha} + k \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

avec k entier.

Exercice 18.3 : Michelson en lame d'air (PC-PSI)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . La longueur d'onde de la source vaut $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ dans le vide, de symétrie de révolution autour de l'axe SJ . L'indice de l'air vaut $1,0$. On observe dans le plan focal d'une lentille mince convergente L de distance focale $f' = 1,0 \text{ m}$.

1. Qu'observe-t-on sur l'écran ?
2. On déplace M_2 de $e = 1,1 \text{ mm}$ dans la direction des x positifs. Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles. Comment s'appelle le dispositif ?
3. Où sont localisées les interférences ? Comment les observe-t-on expérimentalement ?
4. Déterminer les rayons des deux premiers anneaux brillants.
5. On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre et les rayons des deux premiers anneaux brillants.

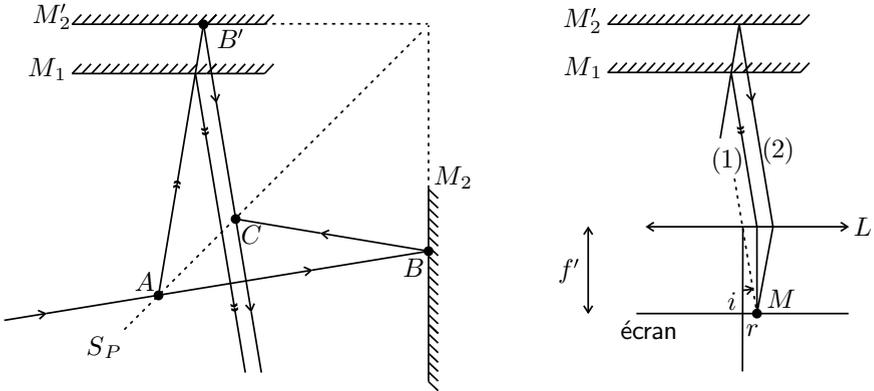


Analyse du problème

Cet exercice traite du Michelson en lame d'air. Le schéma équivalent permet de calculer plus simplement la différence de marche et les rayons des premiers anneaux brillants. On rajoute ensuite une lame d'épaisseur e' ce qui revient à remplacer de l'air d'indice $1,0$ par une lame d'indice n .



1. On est au contact optique. La différence de marche est nulle. L'écran est uniformément éclairé. On observe une teinte plate brillante.
2. On utilise le schéma équivalent du Michelson en lame d'air : M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice. Les distances AB et AB' sont égales ainsi que les distances BC et $B'C$.

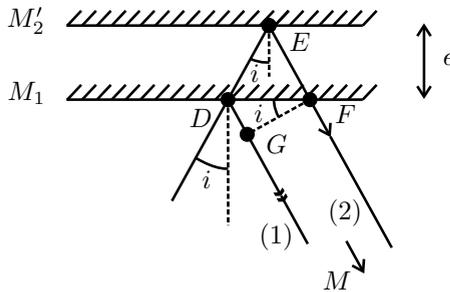


On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en lame d'air.

3. Les rayons (1) et (2) sont parallèles entre eux. Les interférences sont localisées à l'infini pour un Michelson réglé en lame d'air avec une source étendue.

On les observe en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille.

4.



On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre les rayons (2) et (1) arrivant au point M est :

$$\delta = [DEFM] - [DGM]$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan GF serait un plan d'onde et $[GM] = [FM]$. On a alors :

$$\delta = [DEF] - [DG] = 2DE - DG$$

- $\cos i = \frac{e}{DE}$, d'où $2DE = \frac{2e}{\cos i}$.

- $\tan i = \frac{DF}{e}$. On a donc $DF = 2e \tan i$.

Or $\sin i = \frac{DG}{DF}$, d'où : $DG = DF \sin i = 2e \tan i \sin i$.

Finalement, on a :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \frac{\cos^2 i}{\cos i}$$

Soit :

$$\delta = 2e \cos i$$



Ce résultat est à connaître par coeur. Il faut être capable de le redémontrer très rapidement.



On se place dans les conditions de Gauss. On fait un développement limité à l'ordre 2, soit :

$$\delta = 2e \cos i = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

Au centre de l'écran ($i = 0$), l'ordre vaut : $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 4028,57$.

C'est la valeur maximale de p .

Le rayon r_1 du premier anneau est obtenu pour $p_1 = 4028$.



Le rayon du premier anneau ne s'obtient pas avec $p_1 = 1$!



Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan i = i = \frac{r_1}{f'}$.

Soit $p_1 = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p_0 \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$. On a alors : $\frac{p_1}{p_0} = 1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}$,

soit :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)} = 16,8 \text{ mm}$$



Le deuxième anneau est obtenu pour $p_2 = 4027$. On obtient alors :

$$r_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right)} = 27,9 \text{ mm}$$

La différence de marche en M ne dépend que de la distance $F'M$ ce qui montre que les franges d'interférences sont des anneaux centrés sur F' .

5. Sur le chemin du rayon (1), on remplace sur une épaisseur e' de l'air par une lame d'indice n . La nouvelle différence de marche δ' peut s'exprimer en fonction de l'ancienne différence de marche δ sans la lame :

$$\delta' - \delta = -(2ne' - 2e') = -2(n - 1)e'$$



Attention au facteur 2, car le rayon (1) passe deux fois dans la lame. Il faut mettre un signe (-) devant $(2ne' - 2e')$ car la différence de marche est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1). L'expression est valable pour des angles i faibles.



Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = p - \frac{2(n - 1)e'}{\lambda_0}$$

La variation de l'ordre d'interférence au centre vaut

$$\Delta p = -\frac{2(n - 1)e'}{\lambda_0} = -17,8$$

Le nouvel ordre d'interférence au centre vaut : $p'_0 = 4010,76$.

On obtient le rayon du premier anneau avec $p'_1 = 4010$. Soit :

$$r'_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_1}{p'_0} \right)} = 19,5 \text{ mm}$$

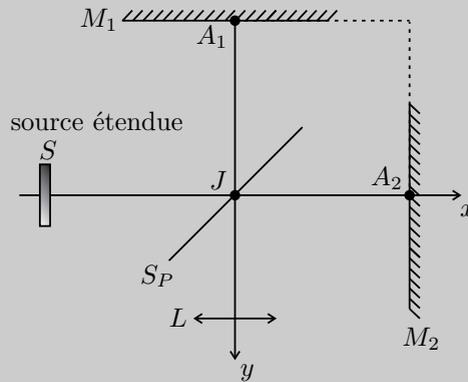
On obtient le rayon du deuxième anneau avec $p'_2 = 4009$. Soit :

$$r'_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_2}{p'_0} \right)} = 29,7 \text{ mm}$$

Exercice 18.4 : Michelson en coin d'air (PC-PSI)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . La longueur d'onde de la source vaut $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ dans le vide, de symétrie de révolution autour de l'axe SJ . L'indice de l'air vaut $1,0$. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha = 1$ minute d'arc autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

1. Comment s'appelle ce dispositif ? Pour des rayons lumineux en incidence normale par rapport au miroir M_1 , faire apparaître à l'aide du schéma équivalent la position du plan de localisation de la figure d'interférences.
2. Comment faut-il placer la lentille L pour observer les interférences sur un écran ?
3. Caractériser le système de franges et calculer numériquement la valeur de l'interfrange sur l'écran, sachant que le grandissement de la lentille est -4 .
4. On translate le miroir (M_2) d'une distance ℓ dans le sens des $x > 0$. De quelle distance se sont déplacées les franges sur l'écran ?
5. On éclaire le coin d'air en lumière blanche avec $\ell = 0$. On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Indiquer un moyen de déterminer l'épaisseur e' ou l'indice moyen de la lame.

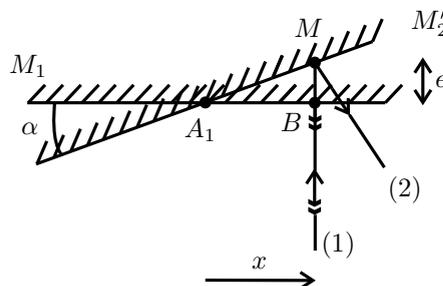


Analyse du problème

Cet exercice traite du Michelson en coin d'air. Le schéma équivalent permet de calculer plus simplement la différence de marche. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs. L'écran n'est pas dans le plan focal image de la lentille mais dans le plan du conjugué du miroir M_1 à travers la lentille.



1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. On se place en incidence normale par rapport au miroir M_1 . Les rayons qui interfèrent se coupent au point M situé sur le miroir M'_2 .

En incidence normale, les interférences sont donc localisées sur le miroir M'_2 . On admet que pour une incidence quasi-normale, les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

2. La lentille L sert à projeter la figure d'interférences sur un écran. L'écran doit être dans le plan contenant l'image du miroir M_1 à travers la lentille L . On appelle M' le conjugué de M à travers la lentille.



Attention, l'écran n'est pas dans le plan focal image de la lentille comme dans le Michelson réglé en lame d'air. L'angle α est très faible. Il est fortement augmenté sur la figure ci-dessus.



3. On pose $x = \overline{A_1B}$. Comme l'angle α est très faible, on fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1 = \frac{x}{A_1M}$ et $\tan \alpha = \alpha = \frac{e}{x}$.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 = 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

car le rayon qui se réfléchit sur (M_2) fait en plus un aller-retour entre les deux miroirs.



Les distances aller-retour entre les deux miroirs sont égales au premier ordre. On peut également définir la différence de marche par $\delta = [SM]_1 - [SM]_2$. Le choix est arbitraire sauf si l'énoncé le précise.



L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0}$$

On a des franges brillantes pour $p = k$ entier relatif, soit :

$$x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Les franges brillantes sont des droites parallèles à l'arête du coin d'air. Pour calculer l'interfrange, on utilise la relation : $p(x + i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x+i) = p(x) - 1$.



On a donc : $\frac{2\alpha(x+i)}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} + 1$, ce qui donne :

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Pour calculer l'interfrange i' sur l'écran, il faut multiplier l'interfrange i par $|\gamma| = 4$:

$$i' = 4i = 3,75 \text{ mm}$$

4. Si on translate le miroir M_2 d'une distance ℓ , la nouvelle différence de marche est :

$$\delta_1 = 2\alpha x + 2\ell$$

Le grandissement de la lentille vaut : $\gamma = -4$. On a alors : $x' = \gamma x$.

Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x'}{\lambda_0 \gamma} + \frac{2\ell}{\lambda_0}$$

L'ordre 0 est obtenu pour $x' = -\frac{\gamma\ell}{\alpha}$ alors qu'il était obtenu pour $x' = 0$ sans translation du miroir M_2 .

Les franges se sont donc déplacées sur l'écran dans le sens des $x > 0$ d'une distance $-\frac{\gamma\ell}{\alpha}$.

5. Sans la lame :

On éclaire le coin d'air en lumière blanche. On repère alors la frange centrale blanche qui est bien contrastée. Les autres franges sont irisées. La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit $x = 0$. En plaçant la lame, ces franges disparaissent.

Avec la lame :

La nouvelle différence de marche vaut : $\delta_2 = \delta - 2(n-1)e'$.



On a un signe $-$ devant $2(n-1)e'$ car la différence de chemin est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1).



Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} - \frac{2(n-1)e'}{\lambda_0}$$

On retrouve la frange centrale pour $p_2 = 0$, soit :

$$x = \frac{(n-1)e'}{\alpha}$$

Sur l'écran, on a :

$$x' = \frac{\gamma(n-1)e'}{\alpha}$$

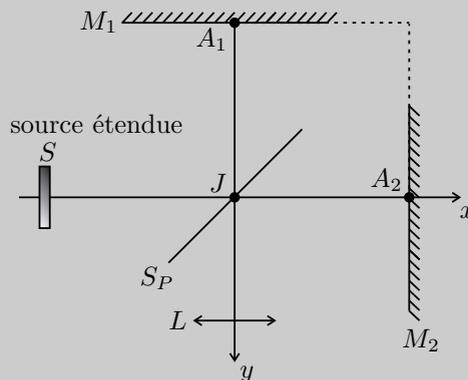
La mesure du déplacement x' permet d'en déduire l'indice moyen n ou l'épaisseur e' .

Exercice 18.5 : Michelson et doublet du sodium (PC-PSI)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

La source primaire est une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueurs d'onde dans la vide $\lambda_1 = \lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_2 = \lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}$. On donne : $\lambda_m = 589,3$ nm. On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. L'indice de l'air vaut $1,0$. On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha \ll 1$ autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

1. Calculer la différence de marche et caractériser le système de franges.
2. On translate le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges. On constate que les franges disparaissent lorsque le déplacement de M_2 est $d = 0,15$ mm. Expliquer le phénomène.
3. Déterminer l'éclairement dû au doublet au point A_1 et le contraste local de la figure d'interférences défini par $C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$. Représenter graphiquement le contraste en fonction de la différence de marche. En déduire $\Delta\lambda$.
4. En déduire $\Delta\lambda$ en raisonnant sur les ordres de chaque système d'interférences au point A_1 .

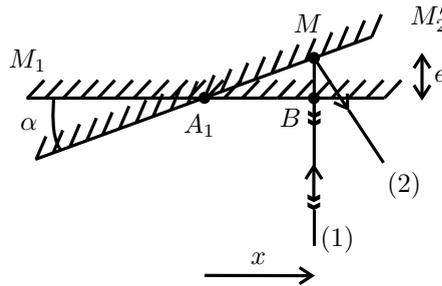


Analyse du problème

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent sur le Michelson en coin d'air. La source n'est plus monochromatique mais contient deux longueurs d'onde. La translation du miroir M_2 permet d'en déduire $\Delta\lambda$. On va voir deux méthodes : calcul de l'éclairement total avec interprétation du contraste local, calcul des ordres pour chaque système d'interférences.



1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

2. On a la superposition de deux systèmes d'interférences (premier système de longueur d'onde λ_1 et deuxième système de longueur d'onde λ_2). Les ondes émises par les deux longueurs d'onde sont incohérentes : il faut faire **la somme des éclairagements**.

- Le miroir n'est pas translaté. Au point $A_1(x = 0)$, la différence de marche est nulle pour les deux longueurs d'onde. Il y a coïncidence : les franges brillantes de chaque système se superposent.
- À la fin de la translation du miroir, la différence de marche au point A_1 est $2d$. On constate expérimentalement que les franges disparaissent. Il y a anticoïncidence : les franges brillantes d'un système se superposent aux franges sombres de l'autre système. On a un brouillage de la figure.

3. Première méthode : Calcul de l'éclairement total

Lorsqu'on translate le miroir, la différence de marche est $\delta = 2d$ au point A_1 . L'éclairement pour le système 1 est :

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right)$$

L'éclairement pour le système 2 est :

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

L'éclairement total est :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left(2 + 2 \cos \left(2\pi\delta \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2} \right) \right) \cos \left(2\pi\delta \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2} \right) \right) \right)$$

On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. On a alors : $\lambda_1\lambda_2 \approx \lambda_m^2$. D'où :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right) \right)$$

L'éclairement dépend de la différence de marche δ :

- Le premier terme : $\cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)$ a une grande période égale à $\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$. C'est donc un terme qui varie lentement.
- Le deuxième terme : $\cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right)$ a une petite période égale à λ_m . C'est donc un terme qui varie rapidement.

On pose :

$$\Gamma = \cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)$$

L'éclairement se met sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{moy}} \left(1 + \Gamma \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right) \right)$$



La définition du contraste local est délicate : on fait varier la différence de marche de quelques λ_m . Le terme lent ne varie quasiment pas alors que le terme rapide varie entre -1 et 1 .



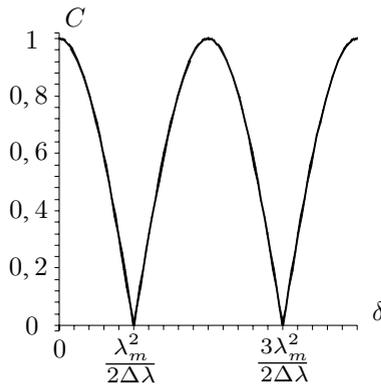
Lorsque δ varie de quelques λ_m , l'éclairement varie entre ε_{\min} et ε_{\max} , c'est-à-dire que le terme rapide vaut -1 ou 1 .

On a donc : $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{moy}} (1 + |\Gamma|)$ et $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\text{moy}} (1 - |\Gamma|)$.

Le contraste local vaut :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \frac{\varepsilon_{\text{moy}} (1 + |\Gamma(\delta)|) - \varepsilon_{\text{moy}} (1 - |\Gamma(\delta)|)}{\varepsilon_{\text{moy}} (1 + |\Gamma(\delta)|) + \varepsilon_{\text{moy}} (1 - |\Gamma(\delta)|)} = |\Gamma(\delta)|$$

Le contraste s'annule pour $\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier.



- Lorsque $d = 0$, le contraste vaut 1. On a des franges bien contrastées.
- Lorsque d augmente, le contraste diminue. Les franges sont de moins en moins bien contrastées.
- La première annulation du contraste a lieu pour $k = 0$, soit :

$$\delta = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$$

Application numérique :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{4d} = 0,58 \text{ nm}$$

4. Deuxième méthode : Calcul des ordres pour chaque système d'interférences

Lorsqu'il y a antioïncidence, $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} + k$ avec k un entier relatif.

- Avant le déplacement du miroir, la différence de marche au point A_1 est :
 $\delta = 2\alpha x = 0$
- Après le déplacement du miroir d'une distance d , la différence de marche au point A_1 vaut $2d$.

L'ordre d'interférence pour le système 1 est :

$$p_1 = \frac{2d}{\lambda_1}$$

L'ordre d'interférence pour le système 2 est :

$$p_2 = \frac{2d}{\lambda_2}$$

On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. On a alors : $\lambda_1 \lambda_2 \approx \lambda_m^2$.

On en déduit que :

$$p_1 - p_2 = \frac{2d}{\lambda_1} - \frac{2d}{\lambda_2} = \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = \frac{1}{2} + k$$

Le premier brouillage a lieu pour $k = 0$, soit :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{4d} = 0,58 \text{ nm}$$

Remarque : La deuxième méthode est plus rapide que la première.

Exercice 18.6 : Michelson et raie à profil rectangulaire (PC-PSI)

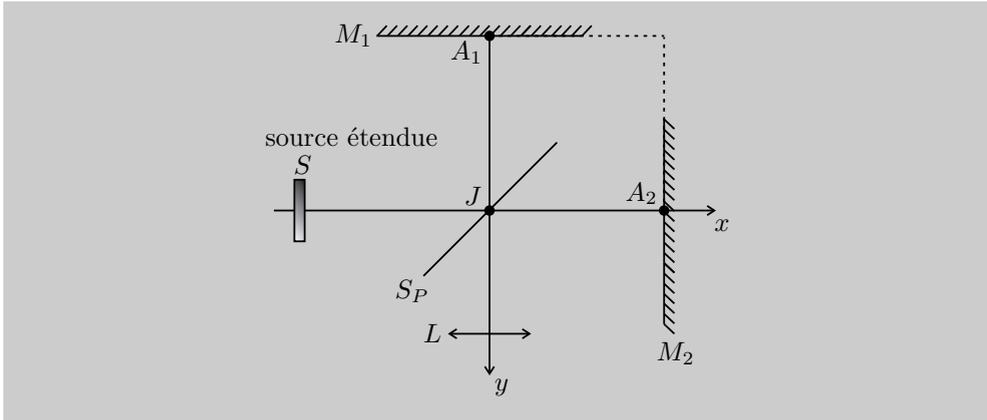
Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

La radiation utilisée est la raie rouge du cadmium à profil rectangulaire. On appelle A la densité spectrale de fréquence de l'éclairement. L'éclairement dû à la bande fréquence $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée est $A d\nu$ pour une fréquence comprise entre $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$. ν_0 est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$. L'indice de l'air vaut $1,0$. On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha \ll 1$ autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

1. Calculer la différence de marche et caractériser le système de franges.
2. On translate le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges. Le contraste s'annule la première fois pour $d = 15 \text{ cm}$. Calculer $\Delta\nu$.
3. Calculer la longueur de cohérence $\frac{c}{\Delta\nu}$ et la durée moyenne d'un train d'onde.

Conclusion.

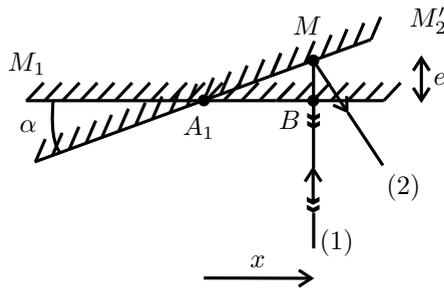


Analyse du problème

On travaille avec un Michelson en coin d'air. La source est à profil rectangulaire. La translation du miroir M_2 permet d'en déduire $\Delta\lambda$ à partir du contraste local. On va démontrer le résultat général suivant : La différence de marche ne doit pas être supérieure à la longueur de cohérence dans les expériences d'interférences.



1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

2. Les ondes émises par les différentes fréquences sont incohérentes. Il faut donc faire la somme des éclairagements.

L'éclairement dû à la bande de fréquence $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ vaut $A d\nu$ lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée.

L'éclairement dû à la bande de fréquence $d\nu$ en sortie de l'interféromètre est :

$$d\varepsilon = 2A d\nu \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right)$$

On a donc :

$$\varepsilon = 2A \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right) d\nu = 2A \left[\nu + \frac{\sin \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right)}{\frac{2\pi\delta}{c}} \right]_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}}$$

D'où :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{\frac{2\pi\delta}{c}} \left(\sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} \right) \right) \right)$$

On obtient :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{\frac{2\pi\delta}{c}} \left(2\sin \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right) \right)$$

D'où finalement :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right) \right)$$

Si on représente l'éclairement en fonction de δ , on a un terme lent : $\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right)$ et un terme rapide : $\cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right)$.

Lorsque δ varie de quelques λ_m , l'éclairement varie entre ε_{\min} et ε_{\max} , c'est-à-dire que le terme rapide vaut -1 ou 1 .

$$\text{On a donc : } \varepsilon_{\max} = 2A\Delta\nu \left(1 + \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \right| \right)$$

$$\text{et } \varepsilon_{\min} = 2A\Delta\nu \left(1 - \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \right| \right).$$

Le contraste local est :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \right|$$

C s'annule pour la première fois lorsque $\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu = \pi, \text{ d'où : } \delta = 2d = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Si $\delta > 2d$, le contraste est très proche de 0. Expérimentalement, les franges ne réapparaissent plus.

Application numérique :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} = 1,0 \text{ GHz}$$

3. La longueur de cohérence est :

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = 2d = 30 \text{ cm}$$

La durée du train d'onde est :

$$\tau = \frac{L_c}{c} = 1,0 \text{ ns}$$

La longueur de cohérence L_c est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée moyenne τ d'un train d'onde.

La valeur de L_c est assez grande pour cette expérience. L_c peut être beaucoup plus grande pour un laser stabilisé (400 m) alors qu'elle est très faible pour la lumière blanche (0,9 μm).

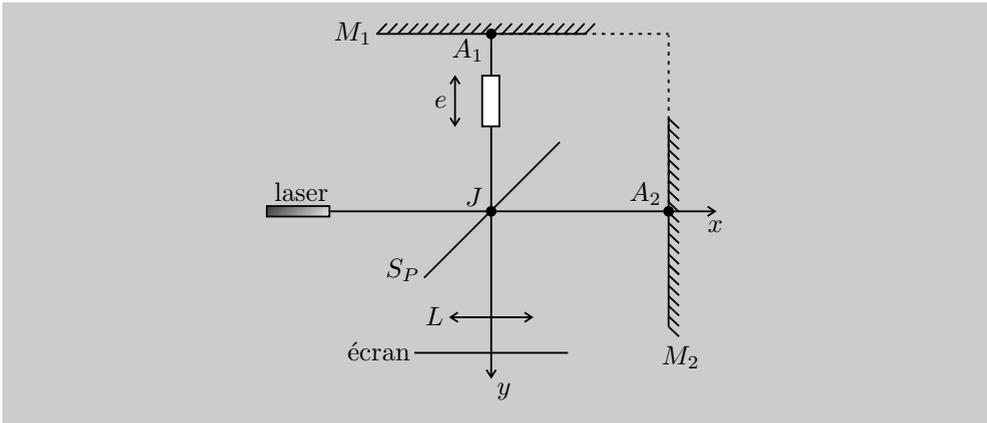
Application pratique : On n'a plus d'interférences lorsque la différence de marche est supérieure à la longueur de cohérence L_c . Les ondes ne proviennent plus du même train d'onde.

Exercice 18.7 : Détermination de l'indice de l'air (PC-PSI)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle α autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 . On utilise un laser avec un élargisseur de faisceau. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$. On note n l'indice de l'air et μ sa masse volumique.

L'air supposé parfait suit la loi de Gladstone : $\frac{n-1}{\mu} = \text{cte}$. La pression atmosphérique vaut 1013 hPa. Sur le trajet de l'un des faisceaux, on interpose une cuve à face parallèles d'épaisseur e . Avec une pompe à main, on crée une dépression de 900 hPa. Avec une vis, on fait rentrer progressivement de l'air à température constante. On observe 29 franges qui défilent en un point de l'écran.

1. Calculer la différence de marche sans la cuve et avec la cuve.
2. En déduire l'indice de l'air.



Analyse du problème

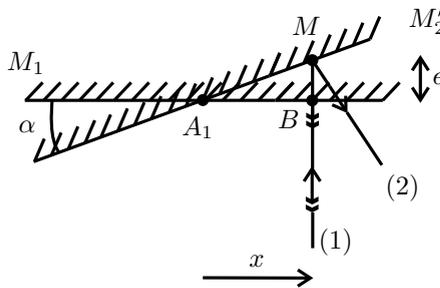
On travaille avec un Michelson en coin d'air. L'indice de l'air ne vaut pas exactement 1 puisque le but de l'exercice est de le déterminer précisément. La différence de marche dépend de l'indice de l'air qui dépend de la pression d'après la loi de Gladstone. On raisonne sur l'ordre d'interférence au début et à la fin de l'expérience pour en déduire la valeur de l'indice de l'air.



- On note n_{air} l'indice de l'air à pression et température ambiante. On note n l'indice de l'air à la pression P et à température ambiante.

Sans la cuve :

On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2n_{\text{air}}\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

Avec la cuve :

Quand on rajoute la lame, le faisceau passe deux fois dans la cuve, la nouvelle différence de marche est :

$$\delta' = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n - n_{\text{air}})e$$



On a bien une différence des deux indices puisqu'on enlève le chemin optique dans l'air (d'indice n) à la pression atmosphérique pour le remplacer par le chemin optique dans l'air (d'indice n_{air}) à la pression P .



2. Soit k le nombre de franges qui défilent au point étudié à l'écran lorsque la pression passe de P_I à P_F .

- La pression initiale P_I vaut $P_I = 1013 \text{ hPa} - 900 \text{ hPa}$ puisqu'on a une dépression de 900 hPa.
- La pression finale P_F vaut $P_F = 1013 \text{ hPa}$.

D'après la loi de Gladstone, l'indice de l'air dépend de la masse volumique :

$$\frac{n - 1}{\mu} = A$$

en notant A la constante.

Pour un gaz parfait, la masse volumique est : $\mu = \frac{PM}{RT}$.

On en déduit que :

$$n = 1 + \alpha P$$

$\alpha = \frac{AM}{RT}$ est un coefficient de proportionnalité.

État initial :

L'indice de l'air dans la cuve est : $n_I = 1 + \alpha P_I$.

La différence de marche est : $\delta'_I = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_I - n_{\text{air}})e$.

L'ordre d'interférence est :

$$p'_I = \frac{\delta'_I}{\lambda_0} = \frac{2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_I - n_{\text{air}})e}{\lambda_0}$$

État final :

L'indice de l'air dans la cuve est : $n_F = n_{\text{air}} = 1 + \alpha P_F$.

La différence de marche est : $\delta'_F = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_F - n_{\text{air}})e$.

L'ordre d'interférence est :

$$p'_F = \frac{\delta'_F}{\lambda_0} = \frac{2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_F - n_{\text{air}})e}{\lambda_0}$$

On se place en un point de l'écran et on compte le nombre k de franges qui défilent. On a donc :

$$p'_I - p'_F = k$$

$$\text{Soit } \frac{2(n_F - n_I)e}{\lambda_0} = k, \text{ d'où } 2\alpha(P_F - P_I)e = k\lambda_0. \text{ Or } \alpha = \frac{n_{\text{air}} - 1}{P_F}.$$

$$\text{On a donc } 2 \frac{n_{\text{air}} - 1}{P_F} (P_F - P_I)e = k\lambda_0, \text{ d'où :}$$

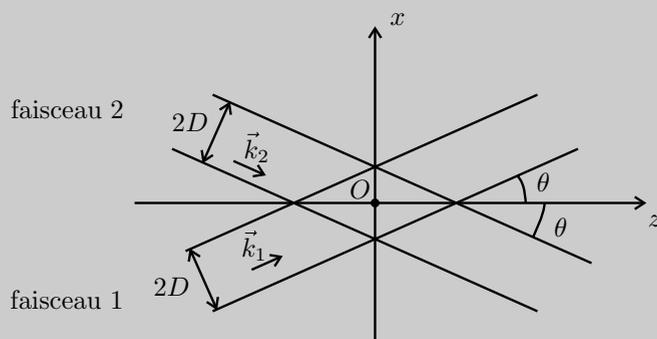
$$n_{\text{air}} = 1 + \frac{kP_F\lambda_0}{2e(P_F - P_I)}$$

Application numérique : $n_{\text{air}} = 1,000295$.

Remarque : Dans les tables, on trouve $n_{\text{air}} = 1,000293$.

Exercice 18.8 : Vélodimétrie laser (PC-PSI)

La mesure de la vitesse d'un fluide peut s'effectuer directement par voie optique sans perturbation de l'écoulement. La recombinaison de deux faisceaux 1 et 2 issus d'un même laser crée une figure d'interférences dans un petit domaine de l'espace centré sur le point de mesure. Chaque faisceau est une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,52 \mu\text{m}$. Lorsqu'une particule solide de petites dimensions, entraînée par l'écoulement, traverse cette figure, elle rencontre des zones alternativement brillantes et sombres. Éclairée par cette figure d'interférences, elle réémet par diffusion une onde lumineuse reçue par un détecteur. La différence de marche est nulle au point O . L'indice du milieu vaut $n = 1,33$.



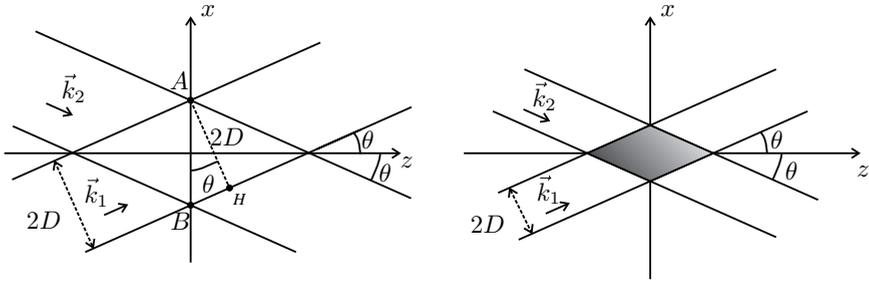
1. Calculer la largeur AB de la figure d'interférences en $z = 0$ sachant que $2D = 1,0 \text{ mm}$ et $\theta = 5^\circ$.
2. Calculer par deux méthodes la différence de marche en un point M de la figure d'interférences. En déduire l'interfrange i et le nombre de franges brillantes contenues dans le champ en $z = 0$.
3. Une particule se déplace à la vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$. Calculer la vitesse de fluide sachant que la période du signal reçu par le détecteur vaut 50 ms .

Analyse du problème

On travaille dans cet exercice avec des ondes planes. Il y a deux méthodes pour calculer la différence de marche. Le plus simple est d'utiliser le formalisme de l'onde plane.



1. Le champ d'interférences est hachuré sur la figure ci-dessous.



En $z = 0$, la largeur AB du champ d'interférences est l'intersection des deux faisceaux, soit :

$$AB = \frac{2D}{\cos \theta} = 1,0 \text{ mm}$$

Calcul de la différence de marche

On a deux méthodes pour calculer la différence de marche en M :

- Méthode 1 : utilisation du formalisme de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM).
- Méthode 2 : détermination géométrique de la différence de marche.

La méthode 1 est plus facile à utiliser quand on a une OPPM puisqu'il suffit de projeter les vecteurs d'onde dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



2. Méthode 1 :

On oriente les angles dans le sens trigonométrique. On a $\theta > 0$. On pose :

$$k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) . Les vecteurs d'onde se mettent sous la forme :

$$\vec{k}_1 = k \begin{vmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix} ; \vec{k}_2 = k \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix}$$

La phase au point M pour l'onde 1 est :

$$\phi_1(M) = \phi_1(O) + \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM}$$

La phase au point M pour l'onde 2 est :

$$\phi_2(M) = \phi_2(O) + \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}$$

D'après l'énoncé, $\phi_1(O) = \phi_2(O)$.

Le déphasage en M $\Delta\phi = \phi_1(M) - \phi_2(M)$ entre les ondes 1 et 2 vaut :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n ((x \sin \theta + z \cos \theta) - (-x \sin \theta + z \cos \theta)) = \frac{4\pi n}{\lambda_0} x \sin \theta$$

L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2nx \sin \theta}{\lambda_0}$$

L'éclairement en M est :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

On a des franges brillantes pour p entier, soit :

$$p = \frac{2nx}{\lambda_0} \sin \theta = m$$

avec m un entier relatif.

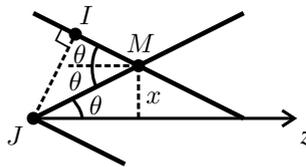
On a des surfaces brillantes perpendiculaires Ox caractérisées par :

$$x_m = m \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta}$$

On en déduit l'interfrange :

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta} = 2,24 \mu\text{m}$$

Méthode 2 :



Au point J , les ondes sont en phase. D'après le théorème de Malus, JJ est un plan d'onde. La différence de marche vaut :

$$\delta = [JM] - [IM] = n(JM - IM)$$

avec $JM = \frac{x}{\sin \theta}$ et $IM = JM \cos 2\theta = \frac{x}{\sin \theta} \cos 2\theta$.

On a donc $\delta = \frac{nx}{\sin \theta} (1 - \cos 2\theta)$. Or $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$, d'où :

$$\delta = \frac{nx}{\sin \theta} 2 \sin^2 \theta = 2nx \sin \theta$$

L'ordre d'interférence est :

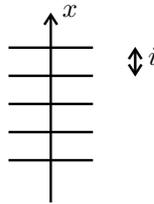
$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2nx}{\lambda_0} \sin \theta$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

D'après la question 1, on a : $x_A = 0,5 \text{ mm}$ et $x_B = -0,5 \text{ mm}$. On en déduit l'ordre d'interférence en A et B : $p_A = \frac{2nx_A}{\lambda_0} \sin \theta = 223,8$ et $p_B = -223,8$.

On a donc 447 franges brillantes contenues dans le champ en $z = 0$.

3. Lorsque la particule se déplace, elle passe successivement sur une frange brillante et une frange sombre. Lorsqu'elle passe sur une frange brillante, le détecteur reçoit la lumière diffusée par la particule qui est éclairée.



La période T du signal correspond au temps mis par la particule pour passer d'une frange brillante à une autre, c'est-à-dire parcourir la distance i à la vitesse v . On a donc :

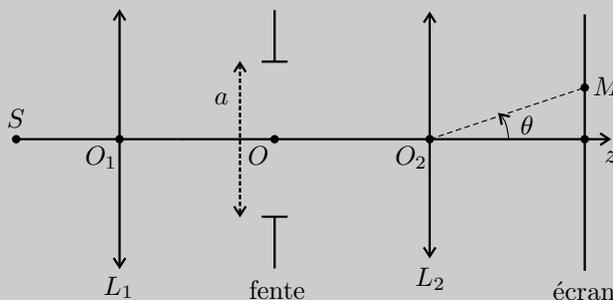
$$v = \frac{i}{T} = 45 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$$

Diffraction

Exercice 19.1 : Diffraction par une fente fine (PC-PSI)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), d'une fente fine de largeur a et de longueur b très grande devant a et d'un écran. On pose $u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0}$.

1. Où faut-il placer la source ponctuelle pour obtenir un faisceau de lumière parallèle à l'axe Oz après la lentille L_1 ? Où faut-il placer l'écran pour avoir une diffraction à l'infini ?
2. Énoncer le principe d'Huygens-Fresnel.
3. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de u et a . Représenter graphiquement l'éclairement en fonction de l'abscisse du point M . Décrire la figure de diffraction et exprimer la largeur de la tache centrale en fonction de λ_0 , f' et a .
4. Comment est modifiée la figure de diffraction si on augmente la largeur de la fente a ? et si on diminue a ?



Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer, c'est-à-dire la diffraction à l'infini. L'écran doit être dans le plan focal image d'une lentille convergente. On utilise le principe de Huygens-Fresnel pour calculer l'amplitude de l'onde diffractée et en déduire l'éclairement en un point de l'écran.



1. Pour avoir un faisceau de lumière parallèle à l'axe optique, la source S doit être placée dans le plan focal objet de la lentille L_1 .

Remarque : La source S et la lentille L_1 forment un collimateur puisqu'on a une image à l'infini.

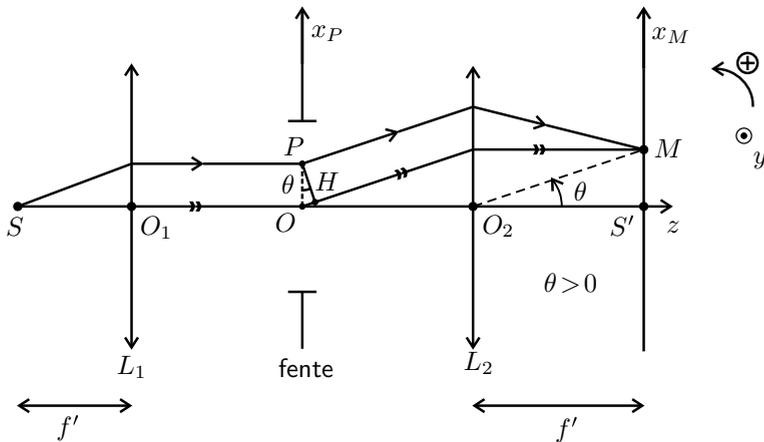


Pour avoir une diffraction à l'infini (ou diffraction de Fraunhofer), l'écran doit être placé dans le plan focal image de la lentille L_2 .

2. Énoncé du principe d'Huygens-Fresnel :

Chaque surface élémentaire dS centrée sur un point de la fente se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à dS . Les sources secondaires sont alors cohérentes.

3. La fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



Il faut accorder un soin tout particulier à la réalisation du schéma. Il y a plusieurs abscisses dans l'exercice : abscisse du point P notée x_P et abscisse du point M notée x_M .

Cours : On utilisera très souvent deux rayons lumineux : un rayon lumineux passant par O (appelé point de référence) et un rayon lumineux passant par un point P quelconque.

Pour placer le point M , on trace un rayon lumineux parallèle aux deux rayons arrivant sur L_2 et passant par O_2 . Ce rayon passant le centre optique n'est pas dévié. Le point M est l'intersection de ce rayon tracé en pointillés avec le plan focal image de L_2 . On l'appelle foyer secondaire image de L_2 correspondant à l'inclinaison θ .

On utilisera souvent le théorème de Malus : les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux.

Cas général : première formule de la diffraction

L'amplitude complexe de l'onde au point M s'écrit :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \underline{t}(P) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) dS$$

$\underline{a}(M)$ est l'amplitude de l'onde diffractée.

α est un coefficient de proportionnalité que l'on ne détaillera pas.

$\Phi_O(M)$ est le retard de phase de l'onde passant par les points S , O et M .

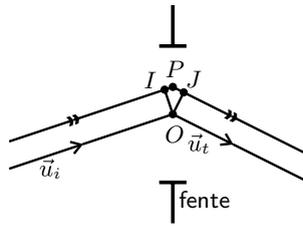
dS est l'élément de surface autour du point P .

δ est la différence de marche entre le chemin optique SPM et le chemin optique SOM .

$\underline{t}(P)$ est la fonction de transparence de la fente. Ici, en tout point de la fente, la transparence vaut 1. La fente est appelée pupille diffractante.

Cas particulier de deux ondes planes : deuxième formule de la diffraction

On rencontre souvent le cas particulier avec deux ondes planes représentées sur le schéma ci-dessous. L'onde incidente a pour direction de propagation \vec{u}_i et l'onde diffractée a pour direction de propagation \vec{u}_t . D'après le théorème de Malus, OI est un plan d'onde. En utilisant le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, OJ est un plan d'onde.



La différence de marche est alors :

$$\delta = -(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}$$

L'amplitude complexe de l'onde au point M s'écrit alors :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \underline{t}(P) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}\right) dS$$



D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan PH serait un plan d'onde, donc $[PM] = [HM]$.

Le plan PO est un plan d'onde pour l'onde incidente, donc $[SP] = [SO]$.

La différence de marche entre les chemins SPM et SOM est donc :

$$\delta = -[OH] = -n_{\text{air}} OH = -OH = -x_P \sin \theta \approx -x_P \theta$$

Comme on travaille dans les conditions de Gauss : $\tan \theta = \theta = \frac{x_M}{f'}$.

La différence de marche est donc :

$$\delta = -x_P \frac{x_M}{f'}$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \underline{t}(P) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} x_P \sin \theta\right) dS$$

Remarque : On aurait pu appliquer directement la deuxième formule de la diffraction. La première formule est préférable car elle permet de bien visualiser graphiquement la différence de marche.



On pose $dS = b dx_P$. On a alors :

$$\underline{a} = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) b \int_{x_P = -\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P$$

Il reste à calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{x_P = -\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P &= \frac{[\exp(-i2\pi u x_P)]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}}{-i2\pi u} \\ &= \frac{a \exp(-i\pi u a) - \exp(i\pi u a)}{-i2\pi u} \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{x_P = -\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P = a \operatorname{sinc}(\pi u a)$$

On pose $\alpha_1 = \alpha \exp(i\Phi_O(M))$. D'où :

$$\underline{a} = \alpha_1 a b \operatorname{sinc}(\pi u a)$$

L'éclairement est :

$$\varepsilon = K \underline{a} \underline{a}^* = K |\alpha_1|^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi u a) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2(\pi u a)$$

On a :

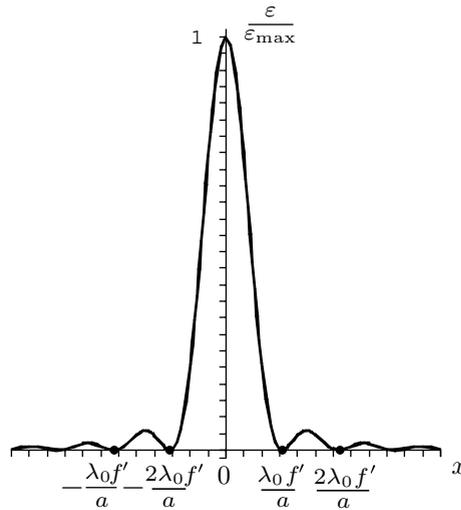
$$u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0} \approx \frac{\theta}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'}$$

Soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi x_M a}{\lambda_0 f'}\right)$$

La fonction sinus cardinal s'annule pour : $\frac{\pi x_M a}{\lambda_0 f'} = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$x_M = n \frac{\lambda_0}{a} f'$$



- $x = 0$ correspond au maximum de l'éclairement. La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique S' de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

- La largeur de la tache centrale est de largeur $2 \frac{\lambda_0 f'}{a}$.

- Les taches secondaires sont beaucoup moins lumineuses et de largeur $\frac{\lambda_0 f'}{a}$.

4. Environ 90% de l'énergie lumineuse est concentrée dans la tache centrale. La largeur de la tache centrale est inversement proportionnelle à a . Si a augmente, la largeur de la tache centrale diminue. Si a est très grand devant λ_0 , toute la lumière est sur l'image géométrique S' de la source à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . Il n'y a plus de diffraction. On peut appliquer les résultats de l'optique géométrique.

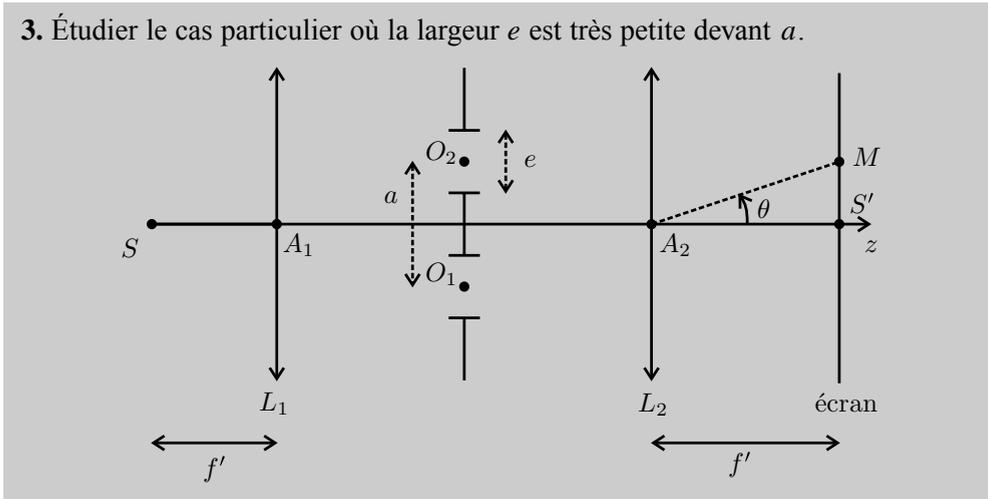
Si a est très petit devant λ_0 , la fonction sinus cardinal tend vers 1. On observe un éclairement uniforme.

Exercice 19.2 : Diffraction par deux fentes fines (PC-PSI)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), de deux fentes fines (largeur e , longueur b très grande devant e) et d'un écran. Les centres O_1 et O_2 des deux fentes sont distants de a . On pose $u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0}$.

1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de u , a et e .
2. Représenter graphiquement l'éclairement en fonction de x sachant que $a = 4e$.

3. Étudier le cas particulier où la largeur e est très petite devant a .



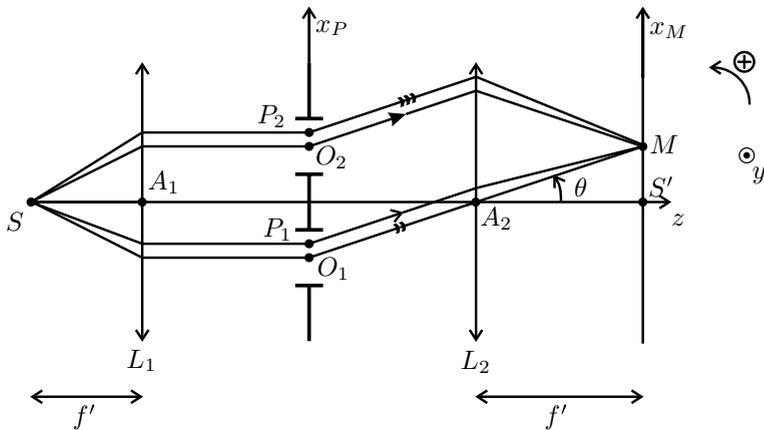
Analyse du problème

On a étudié dans l'exercice précédent la diffraction de Fraunhofer due à une fente. On va reprendre la même technique de calcul pour l'amplitude de l'onde due à la fente 1 et en déduire directement l'amplitude de l'onde due à la fente 2.

On va retrouver le cas limite des fentes d'Young si la largeur e est très petite devant la distance entre les deux fentes.



1. Les fentes sont de longueur très grande suivant Oy . Elles ne diffractent pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



D'après le principe d'Huygens-Fresnel, toutes les ondes émises par les éléments de surface dS des deux fentes sont cohérentes. On peut donc faire la somme de leurs amplitudes.

L'amplitude de l'onde au point M est la somme de l'amplitude au point M due à la fente 1 et l'amplitude au point M due à la fente 2. On a alors :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M)$$



Le schéma est essentiel dans les exercices de diffraction. Il est astucieux de repérer les abscisses des points P_1 et P_2 par rapport à O_1 et O_2 les centres des fentes.

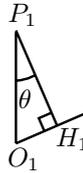


Calcul de l'amplitude due à la fente 1 :

Il faut calculer :

$$\underline{a}_1(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) \int \int_{P_1 \in \text{fente 1}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_1\right) dS_{P_1}$$

D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan P_1H_1 serait un plan d'onde, donc $[P_1M] = [H_1M]$.



Le plan P_1O_1 est un plan d'onde pour l'onde incidente, donc $[SP_1] = [SO_1]$.

La différence de marche entre les chemins SP_1M et SO_1M est donc :

$$\delta_1 = -[O_1H_1] = -n_{\text{air}}O_1H_1 = -O_1H_1 = -x_{P_1} \sin \theta \approx -x_{P_1} \theta$$

Comme on travaille dans les conditions de Gauss : $\tan \theta = \theta = \frac{x_M}{f'}$.

La différence de marche est donc :

$$\delta_1 = -x_{P_1} \frac{x_M}{f'}$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) \int \int_{P_1 \in \text{fente 1}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}x_{P_1} \sin \theta\right) dS_{P_1}$$

On pose $dS_{P_1} = b dx_{P_1}$. On a alors :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) b \int_{x_{P_1} = -\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \exp(-i2\pi u x_{P_1}) dx_{P_1}$$

Il reste à calculer l'intégrale :

$$\int_{x_{P_1} = -\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \exp(-i2\pi u x_{P_1}) dx_{P_1} = \frac{[\exp(-i2\pi u x_{P_1})]_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}}}{-i2\pi u}$$

$$= \frac{e}{e} \frac{\exp(-i\pi ue) - \exp(i\pi ue)}{-i2\pi u} = e \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

D'où :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) be \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

Calcul de l'amplitude due à la fente 2 :

Il faut calculer :

$$\underline{a}_2(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) \int_{P_2 \in \text{fente 1}} \int \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_2\right) dS_{P_2}$$

On montre de même que :

$$\delta_2 = -x_{P_2} \frac{x_M}{f'}$$

On a alors :

$$\underline{a}_2 = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) b \int_{x_{P_2} = -\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp(-i2\pi u x_{P_2}) dx_{P_2}$$

On retrouve la même intégrale et on obtient :

$$\underline{a}_2(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) be \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

Calcul de l'amplitude totale :

$$\underline{a} = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) be \operatorname{sinc}(\pi ue) + \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) be \operatorname{sinc}(\pi ue)$$



L'astuce est de mettre en facteur une exponentielle complexe pour faire apparaître une différence de marche dans l'autre terme.



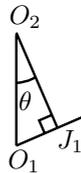
On a alors :

$$\underline{a} = \alpha be \operatorname{sinc}(\pi ue) \exp(i\Phi_{O_2}(M)) [1 + \exp(i(\Phi_{O_1}(M) - \Phi_{O_2}(M)))]$$

Il reste à calculer $\Delta\Phi = \Phi_{O_1}(M) - \Phi_{O_2}(M)$:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} ([SO_1M] - [SO_2M])$$

On fait apparaître une différence de marche que l'on peut interpréter graphiquement :



$$[SO_1M] - [SO_2M] = [O_1J_1] = a \sin \theta \simeq a\theta = a \frac{x_M}{f'_2}$$

On en déduit :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x_M}{f'} = 2\pi u a$$

D'où :

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_1 \exp(i\Delta\Phi) = \underline{a}_1(M) \exp(i2\pi u a)$$

L'éclairement de la fente 1 est : $\varepsilon_1 = K \underline{a}_1 \underline{a}_1^*$.

L'éclairement de la fente 2 est : $\varepsilon_2 = K \underline{a}_2 \underline{a}_2^*$.

Les deux fentes ont donc le même éclairement au point M :

$$\varepsilon_{\text{fente}} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \text{sinc}^2(\pi u e)$$

L'amplitude totale est donc :

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_1 (1 + \exp(i2\pi u a))$$

L'éclairement est : $\varepsilon = K \underline{a} \underline{a}^*$. D'où :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fente}} (1 + \exp(i2\pi u a)) (1 + \exp(-i2\pi u a))$$

Soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fente}} 2 (1 + \cos(2\pi u a))$$

On a le produit d'un terme de diffraction et d'un terme d'interférences.

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \text{sinc}^2(\pi u e) (1 + \cos(2\pi u a))$$

2. L'éclairement peut se mettre aussi sous la forme :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} e\right) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} a\right)\right)$$

La fonction sinus cardinal s'annule pour $\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} e = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$x_M = n \frac{\lambda_0 f'}{e}$$

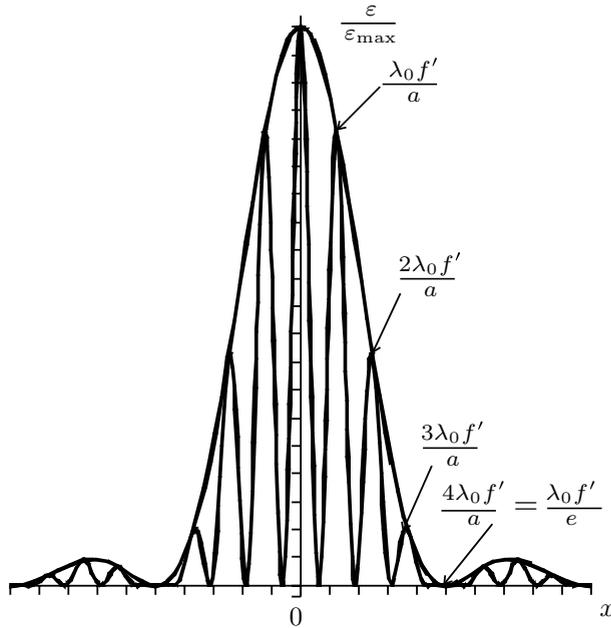
La fonction cosinus est maximale pour $2\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} a = m2\pi$ avec m entier, soit :

$$x_M = m \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

Sur l'écran, on observe des franges d'interférences qui sont modulées par le terme de diffraction.

Chaque fente est de largeur e . On retrouve un terme en $1/e$ caractéristique de la diffraction.

La distance entre les deux fentes est a . On retrouve en terme en $1/a$ caractéristique des interférences.



La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

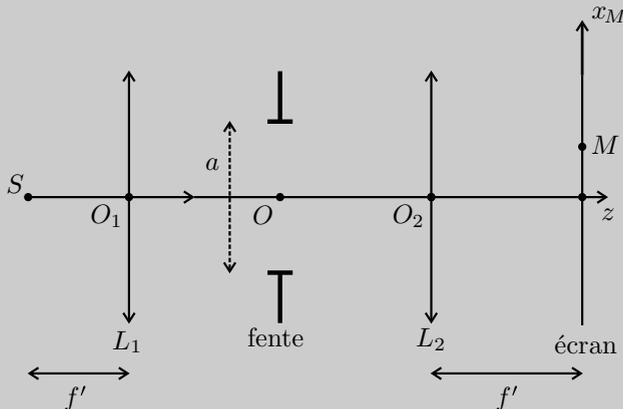
3. Si la largeur e est très faible devant a , alors le terme de diffraction est pratiquement égal à 1.

On retrouve la formule des interférences à deux ondes :

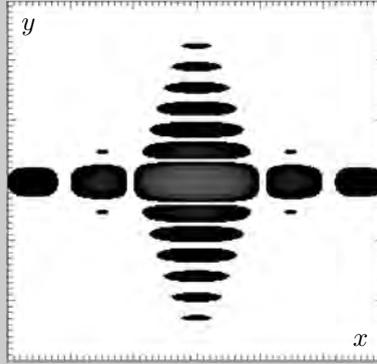
$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 (1 + \cos(\Delta\Phi))$$

Exercice 19.3 : Diffraction par une fente rectangulaire (PC-PSI)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), d'une fente (de largeur a et de longueur b) et d'un écran.



1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de x_M , y_M , λ_0 , f' , a et b .
2. Interpréter la figure de diffraction (mêmes graduations sur les deux axes) et montrer que $b = \beta a$ avec β un entier que l'on déterminera.



3. Étudier le cas particulier où la longueur b est très grande devant la largeur a .

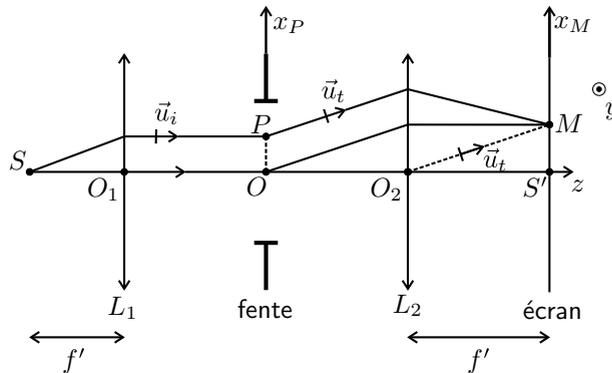
Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer avec une fente rectangulaire. L'analyse de la figure de diffraction permet d'en déduire directement une relation entre a et b .

Si $b \gg a$, on retrouve le cas particulier d'une fente fine.



1. On représente sur la figure les vecteurs unitaires \vec{u}_i et \vec{u}_t correspondant aux ondes planes avant et après la fente rectangulaire.



La figure est en réalité en 3 dimensions. Il faut tenir compte de y_P et y_M dans les calculs. On utilisera donc plutôt la deuxième formule de la diffraction que la première (voir rappels de cours dans l'exercice sur la fente fine).



Le principe d'Huygens-Fresnel permet d'écrire :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}\right) dS$$

puisque la fonction de transparence de la fente vaut 1.

On pose $dS = dx_P dy_P$ et $\vec{u}_i = \vec{u}_z$

Le vecteur unitaire \vec{u}_t est : $\vec{u}_t = \frac{\vec{O_2M}}{O_2M}$. On travaille dans les conditions de

Gauss, donc $O_2M \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} \frac{x_M}{f'} \\ \frac{y_M}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'amplitude complexe s'écrit alors :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{x_M x_P}{f'} + \frac{y_M y_P}{f'}\right)\right) dx_P dy_P$$

Les variables x_P et y_P sont indépendantes. On a deux intégrales à calculer I_1 et I_2 :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) I_1 I_2$$

Première intégrale :

$$I_1 = \int_{x_P = -\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i \frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} x_P\right) dx_P = \left[\frac{\exp\left(-i \frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} x_P\right)}{\frac{-i 2\pi x_M}{\lambda_0 f'}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

On a alors :

$$I_1 = \frac{\exp\left(-i \frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right) - \exp\left(i \frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right)}{\frac{-i 2\pi x_M}{\lambda_0 f'}} = a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right)$$

Deuxième intégrale :

On a de même :

$$I_2 = b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

Finalement, on a :

$$\underline{a}(M) = \alpha e^{i\Phi_O(M)} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

L'éclairement est : $\varepsilon(M) = K \underline{a} \underline{a}^*$. Soit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

L'éclairement est maximum pour $x_M = 0$ et $y_M = 0$.

La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

La première fonction sinus cardinal s'annule pour $\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right) = m\pi$ avec m entier non nul, soit :

$$x_M = m \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

La deuxième fonction sinus cardinal s'annule pour $\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right) = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$y_M = n \frac{\lambda_0 f'}{b}$$

La largeur de la tache centrale suivant x est : $\frac{2\lambda_0 f'}{a}$.

La largeur de la tache centrale suivant y est : $\frac{2\lambda_0 f'}{b}$.

D'après le graphe, la largeur de la tache centrale suivant y est trois fois plus petite que la largeur de la tache centrale suivant x . On a donc :

$$b = 3a$$

Remarque : On peut retrouver ce résultat très rapidement en se rappelant que la largeur de la tache centrale suivant l'axe x est proportionnel à $\frac{1}{a}$ alors que la largeur de la tache centrale suivant l'axe y est proportionnel à $\frac{1}{b}$.



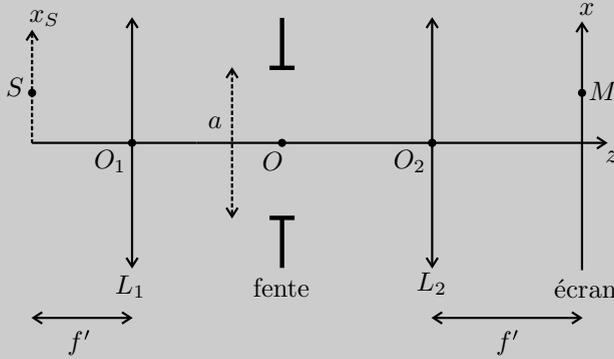
3. Si $b \gg a$, la fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . En effet, la fonction $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$ est quasiment nulle si $y_M \neq 0$. Par contre, elle vaut 1 si $y_M = 0$. On retrouve donc le cas particulier étudié dans l'exercice de diffraction par une fente fine.

Exercice 19.4 : Translation de la source et de la fente fine (PC-PSI)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0), d'une fente fine (de largeur a et de longueur b très grande devant a) et d'un écran. On appelle S' l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2

1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de $x_M, x_{S'}, \lambda_0, f'$ et a .

2. Montrer que la figure de diffraction est centrée sur S' .
3. Comment est modifiée la figure de diffraction si on translate la source S dans le sens des $x > 0$? Et si on translate la fente dans le sens des $x > 0$?

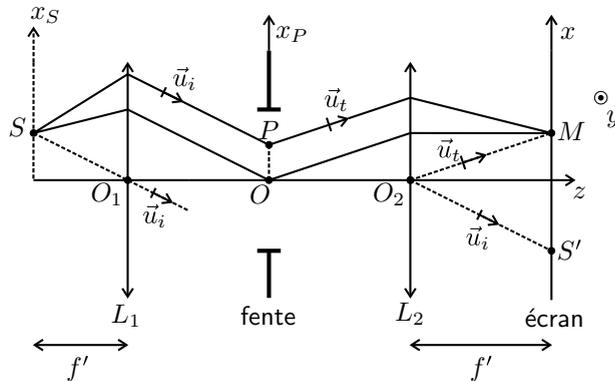


Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer avec une fente fine. La source n'est pas située sur l'axe optique. On va déterminer l'image S' de la source à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . La figure de diffraction est centrée sur S' .



1. La fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



Le principe d'Huygens-Fresnel permet d'écrire :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}\right) dS$$

puisque la fonction de transparence de la fente vaut 1.

On pose $dS = b dx_P$.

Le vecteur unitaire \vec{u}_t est : $\vec{u}_t = \frac{\vec{O_2M}}{O_2M}$. On travaille dans les conditions de Gauss, donc $O_2M \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} \frac{x_M}{f'} \\ \frac{y_M}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur unitaire \vec{u}_i est : $\vec{u}_i = -\frac{\vec{O_1S}}{O_1S}$. On travaille dans les conditions de Gauss, donc $O_1S \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} -\frac{x_S}{f'} \\ -\frac{y_S}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit S' l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . On peut écrire \vec{u}_i sous la forme :

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} \frac{x_{S'}}{f'} \\ \frac{y_{S'}}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $x_{S'} = -x_S$ et $y_{S'} = -y_S$. L'amplitude complexe s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M) &= \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int_{P \in \text{fente}} \int \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{(x_M - x_{S'})x_P}{f'}\right)\right) b dx_P \\ &= \int_{x_P = -\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i \frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} x_P\right) dx_P = \left[\frac{\exp\left(-i \frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} x_P\right)}{\frac{-i2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\exp\left(-i \frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right) - \exp\left(i \frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right)}{\frac{-i2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'}} = a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right) \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\underline{a}(M) = \alpha e^{i\Phi_O(M)} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right)$$

L'éclairement est : $\varepsilon(M) = K \underline{a} \underline{a}^*$. Soit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right)$$

2. L'éclairement est maximum pour $x_M = x_{S'}$.

La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

3. Si on translate la source S dans le sens des $x > 0$, l'image S' se déplace dans le sens des $x < 0$ puisque $x_{S'} = -x_S$. On a donc la même figure de diffraction que dans la question 1 mais elle est centrée sur un autre point puisque le point S' s'est déplacé.

Si on translate la fente dans le sens des $x > 0$, la figure de diffraction n'est pas modifiée.

Exercice 19.5 : Trous d'Young avec lame - Holographie* (PC-PSI)

On réalise l'expérience des fentes d'Young sur la figure 1 sans la lame d'indice n . S_1 et S_2 sont deux fentes fines. La source S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$) est elle aussi une fente fine parallèle à S_1 et S_2 et coïncide avec le foyer objet de la lentille L_1 ; l'écran d'observation se trouve dans le plan focal image de la lentille L_2 de distance focale $f' = 1,0 \text{ m}$. La distance $S_1 S_2$ est égale à $a = 1 \text{ mm}$. L'indice de l'air vaut 1,0.

1. Calculer l'interfrange i sur l'écran. Sur le trajet des rayons issus de S_1 , on place une lame d'épaisseur e et d'indice n . Calculer le déplacement des franges pour $n = 1,5$ et $e = 0,01 \text{ mm}$.

2. La lame précédente est absorbante, de sorte que l'amplitude A_1 des ondes provenant de S_1 est beaucoup plus faible que l'amplitude A_2 des ondes provenant de S_2 . En déduire l'éclairement au point M en faisant un développement limité au 1^{er} ordre en $\frac{A_1}{A_2}$. On appelle $\Delta\phi$ le déphasage entre l'onde passant par S_2 et l'onde passant par S_1 .

3. On remplace l'écran par une plaque photographique. Celle-ci après développement, éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde quelconque transmet en chaque point où elle avait reçu un éclairement ε , une amplitude $\underline{a}_t = \beta \varepsilon^{\frac{-g}{2}} \underline{a}_0$ où β et g sont des constantes caractéristiques de l'émulsion photographique. Calculer en faisant un développement limité au 1^{er} ordre en $\frac{A_1}{A_2}$,

l'amplitude \underline{a}_t des ondes transmises par la plaque en fonction de A_1 , A_2 , \underline{a}_0 , β , g , et $\Delta\phi$. Écrire \underline{a}_t comme la somme de trois termes.

4. La plaque ainsi obtenue est éclairée par un faisceau parallèle (figure 2). Ce faisceau est de même longueur d'onde que celle utilisée pour impressionner la plaque $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$. En négligeant le déphasage introduit par la lame, montrer que l'on obtient après la plaque, 3 ondes planes dont 2 sont déphasées par rapport à l'onde incidente.

5. Montrer alors que ces deux ondes vont converger après une lentille L_3 de même distance focale que L_2 , en 2 points S'_1 et S'_2 du plan d'observation placé dans le plan focal image de L_3 . Déterminer la distance d de chacun des points S'_1 et S'_2 à l'axe optique de la lentille L_3 .

figure 1

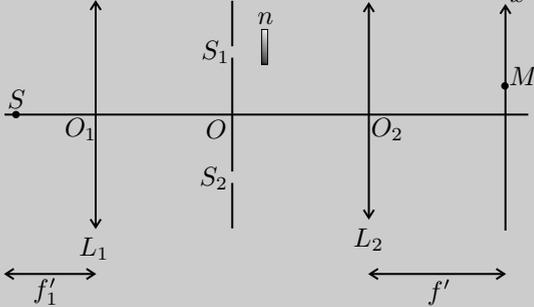
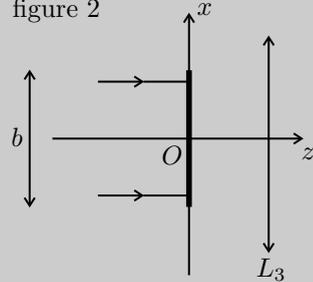


figure 2



Analyse du problème

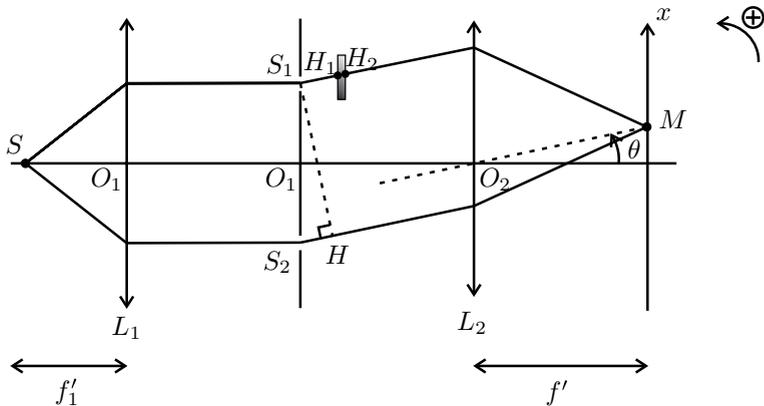
La première question est classique avec le déplacement de la figure d'interférences dû à l'introduction d'une lame.

On remplace ensuite l'écran par une plaque photographique. On va montrer qu'en éclairant correctement cette plaque photographique, on a une restitution des points S_1 et S_2 .

Il faut bien faire attention au paramétrage et ne pas confondre les abscisses x et x' .



1. On travaille dans les conditions de Gauss : $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f'}$.



Sans la lame :

D'après le théorème de Malus, $S_1 S_2$ est un plan d'onde, donc $[SS_1] = [SS_2]$.
 D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, $S_1 H$ serait un plan d'onde. On a donc : $[S_1 M] = [HM]$.

La différence de marche entre SS_2M et SS_1M est :

$$\delta = [SS_2M] - [SS_1M] = S_2H = a \sin \theta = a\theta$$

L'ordre d'interférence au point M est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'}$$

La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit $x = 0$.

L'interfrange est donné par la formule : $p(x + i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x + i) = p(x) - 1$



On a alors : $\frac{a(x + i)}{\lambda_0 f'} = \frac{ax}{\lambda_0 f'} + 1$.

On observe des franges rectilignes parallèles à \vec{y} d'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{a} = 0,6 \text{ mm}$$

Avec la lame :

La nouvelle différence de marche est :

$$\delta' = \frac{ax}{f'} - (n - 1)e$$

puisqu'on enlève le chemin optique dans l'air que l'on remplace par celui dans la lame. On néglige l'inclinaison dans la lame puisqu'on travaille dans les conditions de Gauss avec $\theta \ll 1$.

Le nouvel ordre d'interférence est :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'} - \frac{(n - 1)e}{\lambda_0}$$

La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit :

$$x = \frac{(n - 1)ef'}{a} = 5,0 \text{ mm}$$

La frange centrale s'est donc déplacée vers le haut de 5,0 mm.

L'interfrange n'est pas modifié et vaut toujours 0,60 mm.

2. La formule des interférences à deux ondes s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\Delta\phi) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\phi) \\ &= A_2^2 \left(1 + 2\frac{A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) + \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \end{aligned}$$

On fait un développement limité au premier ordre en $\frac{A_1}{A_2}$. On obtient :

$$\varepsilon = A_2^2 \left(1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right)$$

avec $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} - (n-1)e \right)$.

3. L'amplitude \underline{a}_t des ondes transmises par la plaque est :

$$\underline{a}_t = \beta \varepsilon^{-\frac{g}{2}} \underline{a}_0 = \beta A_2^{-g} \left(1 + \frac{2A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right)^{-\frac{g}{2}} \underline{a}_0$$

En faisant un développement limité au premier ordre, on a :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \left(1 - \frac{g}{2} \frac{2A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right) \underline{a}_0$$

D'où :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \left(1 - g \frac{A_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) - g \frac{A_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \right) \underline{a}_0$$

On obtient finalement :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \underline{a}_0$$

4. Juste derrière la plaque, on obtient la somme de trois ondes :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \underline{a}_0$$

Un point P de la plaque est repéré par son abscisse x . On a alors :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \underline{a}_0 \exp \left(j \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0} \right) \right) - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \underline{a}_0 \exp \left(-j \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0} \right) \right)$$

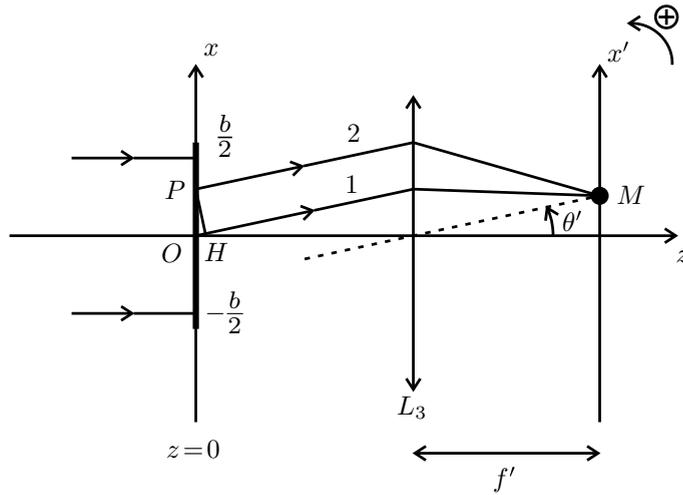
L'amplitude peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{a}_t = \underline{a}_{t0} + \underline{a}_{t1} + \underline{a}_{t2}$$

On a bien la somme de trois ondes planes.

5. La plaque photographique de largeur b et de longueur L très longue située en $z = 0$ transmet en chaque point une amplitude $\underline{a}_t = \underline{a}_{t0} + \underline{a}_{t1} + \underline{a}_{t2}$.

D'après le principe d'Huygens-Fresnel, chaque surface élémentaire dS centrée sur un point de la plaque se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à dS . Les sources secondaires sont alors cohérentes.



Contribution de a_{t1} :

L'amplitude de l'onde émise par l'élément de surface dS est :

$$d\underline{a}_1 = \alpha \underline{a}_{t1} \exp(j\Phi_0(M)) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right) dS_P$$

Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan \theta' \approx \theta' \approx \frac{x'}{f'} \approx \sin \theta'$

La différence de marche est :

$$\delta = [PM] - [OM] = -OH = -x \sin \theta' = -x\theta'$$

On a alors :

$$\begin{aligned} d\underline{a}_1 = & -\alpha \beta \underline{a}_0 A_2^{-\frac{g}{2}} \frac{g A_1}{A_2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f'} - (n-1)e\right)\right) \dots \\ & \dots \exp(j\Phi_0(M)) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\theta'\right) dS \end{aligned}$$

Il est inutile de calculer l'amplitude \underline{a}_1 . On obtient une fonction sinus cardinal qui s'annule pour $\left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) = 0$, soit $\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{x'}{f'}$.

On a donc une figure diffraction centrée sur :

$$x' = a$$

Contribution de a_{t2} :

De même, la contribution de \underline{a}_{t2} donne une figure de diffraction centrée sur $x' = -a$.

On a bien une restitution de S_1 et S_2 . On retrouve le double de la distance entre S_1 et S_2 . Ces deux points S'_1 et S'_2 sont distants de la distance $2a$ de l'axe optique.

Compléments

On peut détailler l'amplitude \underline{a}_1 . La plaque est de largeur b et de longueur L très grande devant b . Elle ne diffracte pas suivant Oy . Tous les termes indépendants de x sont regroupés dans la constante α_1 . On a alors :

$$d\underline{a}_1 = \alpha_1 \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) x\right) dS$$

Il reste à intégrer sur la largeur de la plaque pour calculer \underline{a}_1 :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) x\right) L dx = \alpha_1 L \left[\frac{\exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) x\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right)} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

Soit :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L \left(\frac{\exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right) - \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right)} \right)$$

D'où :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L \frac{b}{b} \left(\frac{2j \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right)} \right)$$

Finalement, on a :

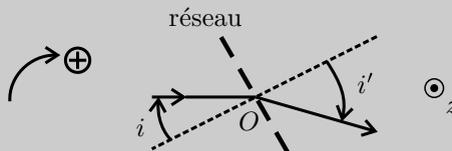
$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) b\right)$$

On a bien une figure de diffraction centrée sur :

$$\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{x'}{f'}$$

Exercice 19.6 : Diffraction par un réseau (PC-PSI)

On considère un réseau par transmission formé de traits fins, identiques, parallèles, distants de $a = 1 \mu\text{m}$ et de longueur très grande devant a . Le faisceau incident a une direction fixe et de longueur d'onde λ_0 dans le vide. Le réseau peut tourner autour de l'axe Oz . L'indice de l'air vaut 1,0.



1. Comment obtenir expérimentalement un faisceau de lumière parallèle ? Comment observer une image à l'infini avec une lentille convergente de distance focale 1,0 m ?

2. Déterminer pour quelles valeurs de l'angle i' , on observe un maximum de lumière à l'ordre k .
3. Pour un ordre k non nul, déterminer la déviation minimale D_m en fonction de k , λ_0 et a .
4. La source S est une lampe à vapeur de sodium. On étudie le spectre à l'ordre 2. Calculer la distance qui sépare les deux raies jaune sur l'écran (longueurs d'onde dans le vide $\lambda_{01} = 589,0$ nm et $\lambda_{02} = 589,6$ nm) en se plaçant au minimum de déviation pour λ_{01} .

Analyse du problème

Comme dans tous les exercices de diffraction, il faut soigner la figure. Les angles sont orientés algébriquement dans le sens des aiguilles d'une montre. La source doit être dans le plan focal objet d'une lentille convergente pour avoir un faisceau de lumière parallèle. Pour observer une image à l'infini, il faut placer l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

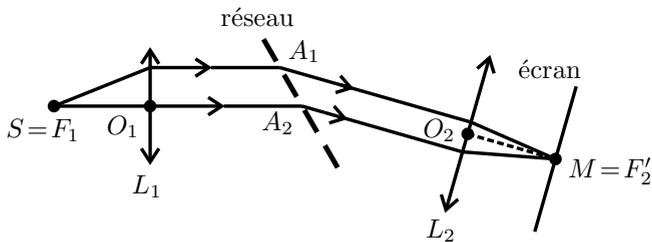
Il est inutile de calculer l'amplitude de l'onde diffractée pour trouver la formule des réseaux. Comme on a un très grand nombre de fentes, il faut que toutes les ondes qui interfèrent soient en phase pour obtenir un éclaircissement maximum.



1. La source S est placée au foyer objet de la lentille convergente L_1 . On obtient alors un faisceau de lumière parallèle.

Remarque : on a réalisé un collimateur.

Pour visualiser une image à l'infini, on place l'écran dans le plan focal image de la lentille convergente L_2 .



2. La différence de marche entre les rayons 1 et 2 est :

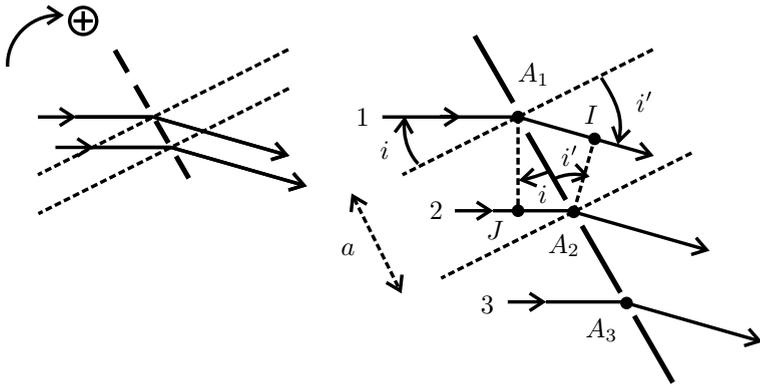
$$\delta = [SA_1M] - [SA_2M]$$

D'après le théorème de Malus, le plan A_1J est un plan d'onde, donc $[SA_1] = [SJ]$.

D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan IA_2 est un plan d'onde, donc $[IM] = [A_2M]$.

La différence de marche est alors égale à :

$$\delta = [A_1I] - [JA_2] = n_{\text{air}}(A_1I - JA_2) = A_1I - JA_2$$



Or $A_1I = a \sin i'$ et $JA_2 = a \sin i$. On en déduit que :

$$\delta = a \sin i' - a \sin i$$

On observe un maximum de lumière si les ondes diffractées par deux traits consécutifs du réseau sont en phase (déphasage multiple de 2π ou différence de marche multiple de λ_0). On doit donc avoir :

$$\delta = k\lambda_0$$

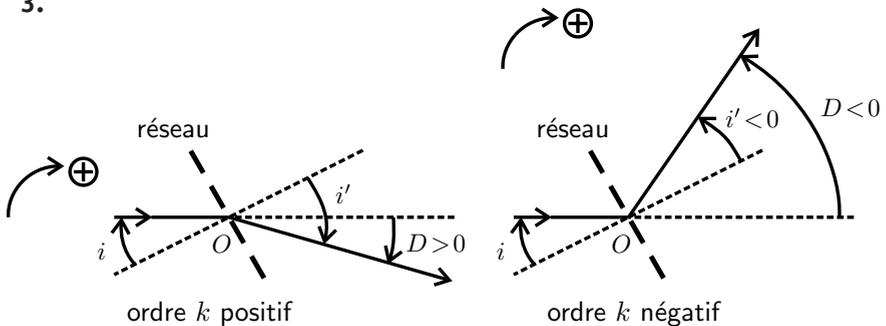
avec k entier.

La formule des réseaux par transmission est donc :

$$\sin i' = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$$

k est l'ordre du réseau.

3.



Ordre k positif :

La déviation du faisceau lumineux est : $D = i' - i$.

On a donc deux relations pour le réseau :

$$\begin{cases} \sin i' = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a} \\ D = i' - i \end{cases}$$

Pour déterminer le minimum de déviation, on calcule la différentielle de ces deux relations :

$$\begin{cases} \cos i' di' = \cos i di \\ 0 = di' - di \end{cases}$$

D'où $\cos i' = \cos i$. On a donc deux possibilités : $i' = i$ ou $i' = -i$.

La première possibilité correspond à l'ordre 0 et la déviation est toujours nulle. On exclut donc ce cas.

La deuxième possibilité correspond à $i' = -i$, soit : $\sin i' = -\sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$.

On a donc : $2 \sin i' = k \frac{\lambda_0}{a}$.

La déviation vaut alors : $D_m = i' - i = 2i'$. Soit :

$$\sin \frac{D_m}{2} = \frac{k \lambda_0}{2a}$$

Ordre k négatif :

La déviation du faisceau lumineux est : $D = i' - i$. On a les mêmes relations que précédemment.

4. On se place au minimum de déviation à l'ordre 2 pour la longueur d'onde λ_{01} .

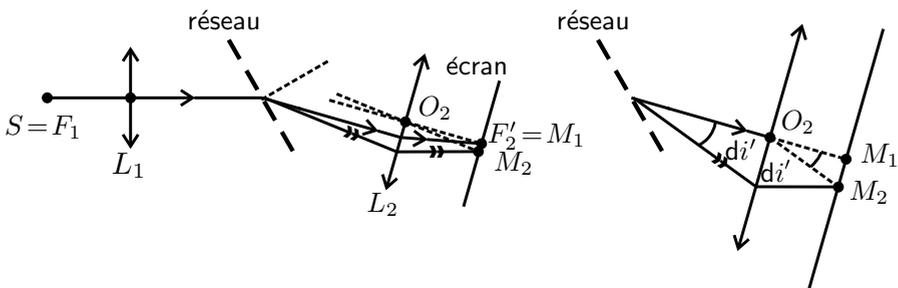
On a donc $i'_1 = -i_1$. La formule des réseaux à l'ordre 2 est :

$$\sin i'_1 = \sin i_1 + 2 \frac{\lambda_{01}}{a}, \text{ soit : } 2 \sin i'_1 = 2 \frac{\lambda_{01}}{a}.$$

On en déduit l'angle $i'_1 = 36,1^\circ$.

Pour l'ordre 2, les rayons de longueur d'onde λ_{01} convergent au point M_1 et les rayons de longueur d'onde λ_{02} convergent au point M_2 .

On fait un zoom sur la lentille 2 en augmentant fortement les angles.



Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, on utilise le calcul différentiel pour déterminer la position du point M_2 par rapport au point M_1 . L'angle d'incidence i est fixé. Lorsque la longueur d'onde varie, on a une variation de l'angle i' .



La formule des réseaux à l'ordre 2 est :

$$\sin i' = \sin i + 2 \frac{\lambda_0}{a}$$

La différentielle s'écrit :

$$\cos i' di' = 2 \frac{d\lambda_0}{a}$$

On en déduit que :

$$di' = 2 \frac{d\lambda_0}{a \cos i'}$$

Le triangle $O_2M_1M_2$ est rectangle en M_1 avec $O_2M_1 = f'_2 = 1 \text{ m}$.

Comme $d\lambda_0 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$ est très faible, alors :

$$\tan di' \approx di' \approx \frac{M_1M_2}{f'_2} \text{ et } \cos i' \approx \cos i'_1$$

Soit :

$$M_1M_2 = 2f'_2 \frac{\lambda_{02} - \lambda_{01}}{a \cos i'_1} = 1,5 \text{ mm}$$

Remarque : On trouve le même résultat si le point M_1 n'est pas confondu avec le foyer image de la lentille L_2 . Dans tous les cas, les points M_1 et M_2 sont dans le plan focal image de la lentille L_2 .

Partie 9

Mécanique des fluides

Plan

20. Cinématique et viscosité	365
20.1 : Étude d'un champ de vitesses bidimensionnel (PC-PSI)	365
20.2 : Écoulement perturbé par une sphère (PC-PSI)	369
20.3 : Écoulement sur un plan incliné (PC-PSI)	372
20.4 : Écoulement de Poiseuille dans un cylindre (PC-PSI)	377
21. Équation d'Euler et théorèmes de Bernoulli	381
21.1 : Tube de Pitot (PC-PSI)	381
21.2 : Débitmètre (PC-PSI)	383
21.3 : Régime transitoire de la vidange d'un réservoir (PC-PSI)	385
21.4 : Cyclone et écoulement tourbillonnaire (PC-PSI)	389
22. Bilans dynamiques et thermodynamiques	395
22.1 : Pompe et dénivellation (PC-PSI)	395
22.2 : Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé (PC-PSI)	399
22.3 : Force subie par un réservoir (PC)	402
22.4 : Fusée Ariane 5 (PC-PSI)	407
22.5 : Tourniquet hydraulique (PC-PSI)	410
22.6 : Fonctionnement d'une hélice (PC-PSI)	413
22.7 : Force exercée sur une plaque (PC-PSI)	418

Cinématique et viscosité

Exercice 20.1 : Etude d'un champ de vitesses bidimensionnel (PC-PSI)

On considère un écoulement stationnaire dont le champ de vitesses est de la forme :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = -kx \\ v_y = ky \end{cases}$$

1. Déterminer la nature de l'écoulement et le potentiel des vitesses Φ . On prendra $\Phi(x = 0, y = 0) = 0$.
2. Représenter les lignes équipotentielles et les lignes de courant.
3. Où peut-on rajouter des obstacles dans l'écoulement ?

Analyse du problème

Pour caractériser la nature de l'écoulement, on va calculer la divergence et le rotationnel du vecteur vitesse avec les coordonnées cartésiennes.

Cours : Description lagrangienne et eulérienne

Les systèmes étudiés en mécanique des fluides contiennent un très grand nombre de molécules. On ne peut pas connaître avec précision la position et la vitesse de chaque molécule. On définit un volume $d\tau$ petit à l'échelle macroscopique mais qui contient suffisamment de molécules pour pouvoir définir des grandeurs moyennes. On se place à l'échelle mésoscopique (ordre de grandeur de 10^{-6} m). Ce petit volume $d\tau$ est appelé particule de fluide. La description de **Lagrange** permet de suivre la position d'une particule de fluide au cours du temps. On l'utilise en mécanique du solide mais cette description est peu adaptée en mécanique des fluides.

La description d'**Euler** permet de suivre l'évolution de la pression $p(M, t)$, du vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ au cours du temps en un point M donné.

Une ligne de courant est une courbe tangente en chaque point au vecteur vitesse \vec{v} . C'est en fait une ligne de champ des vitesses. Pour visualiser les lignes de courant, on met des copeaux de liège en grande quantité et on photographie pendant un court instant. Les petits déplacements des copeaux de liège correspondent aux lignes de courant puisque \vec{v} et $d\vec{l}$ (petit déplacement sur la ligne de courant) sont colinéaires.

La trajectoire d'une particule est le chemin parcouru par une particule au cours du temps. Pour la visualiser, on peut utiliser des copeaux de liège et photographier pendant une durée importante.

Un écoulement est **stationnaire** (on dit aussi permanent) si les différents champs (vecteur vitesse, masse volumique, pression...) ne dépendent pas du temps.

Dans le cas général, les trajectoires et les lignes de courant ne sont pas confondues. Par contre, en régime stationnaire (ou indépendant du temps), elles sont confondues.

Cours : Nature de l'écoulement

Un écoulement **stationnaire** a les propriétés suivantes :

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} ; \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$
- Le vecteur densité de courant de masse $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$ est à flux conservatif. Pour toute surface fermée, le flux du vecteur densité de courant de masse est nul : $\oiint_S \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_{ext} = 0.$
- $\text{div } \vec{j}_m = 0.$ L'équation de conservation de la masse s'écrivant dans le cas général : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_m = 0.$
- \vec{j}_m est à flux conservatif. Le débit massique est le même à travers les différentes sections d'un tube de courant.

Un écoulement **incompressible** a les propriétés suivantes :

- La masse volumique est constante (uniforme et indépendante du temps) en tout point du fluide.
- Le vecteur vitesse \vec{v} est à flux conservatif. Pour toute surface fermée, le flux du vecteur vitesse est nul : $\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}_{ext} = 0.$
- $\text{div } \vec{v} = 0.$
- \vec{v} est à flux conservatif. Le débit volumique est le même à travers les différentes sections d'un tube de courant.

Pour pouvoir considérer l'écoulement incompressible, il faut que la vitesse de l'écoulement soit faible devant la vitesse du son dans le fluide.

On définit le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ par $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$

Un écoulement est **irrotationnel** si $\vec{\Omega} = \vec{0}.$ On peut définir un potentiel des vitesses $\Phi(M, t)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi.$

Un écoulement est **parfait** si on peut négliger tous les termes diffusifs, en particulier la diffusion de quantité de mouvement (terme de viscosité) et la diffusion de la chaleur. L'évolution d'une particule de fluide est donc adiabatique et on la suppose réversible, ce qui revient à la considérer comme isentropique.



1. On calcule la divergence et le rotationnel du vecteur vitesse :

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -k + k = 0$$

L'écoulement est donc incompressible.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -kx \\ ky \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$



Comme on travaille avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser l'opérateur nabla pour calculer la divergence et le rotationnel. Attention, on ne peut pas l'utiliser avec les coordonnées cylindriques et sphériques.



L'écoulement est donc irrotationnel. On peut définir un potentiel des vitesses $\Phi(M, t)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi$. On a donc

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} -kx \\ ky \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

On en déduit que $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = -kx dx + ky dy$.

Il reste à intégrer :

$$\Phi = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + C1$$

D'après l'énoncé, $\Phi = 0$ au point O . La constante d'intégration $C1$ est donc nulle.

Cours : Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points M tel que $\Phi = cte$. On obtient une surface dans le cas général. Comme l'écoulement est à 2 dimensions dans l'exercice, on a donc une ligne équipotentielle.



2. En tout point d'une ligne équipotentielle, on a :

$$\Phi = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = C2 \text{ avec } C2 \text{ une constante, soit :}$$

$$-x^2 + y^2 = C3$$

C'est l'équation d'une hyperbole.

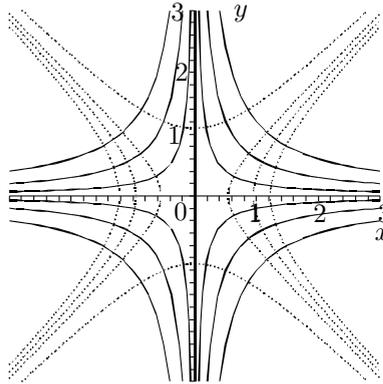
Pour calculer l'équation d'une ligne de courant, on écrit que \vec{v} et \overrightarrow{dl} sont colinéaires, c'est-à-dire $\vec{v} = \alpha \overrightarrow{dl}$ avec $\alpha = cte$.

On a : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -kx \\ ky \end{pmatrix}$ et $d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs sont colinéaires donc : $\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{ky} = \frac{1}{\alpha}$. Il suffit d'intégrer : $-\ln x = \ln y + C4$. On a donc :

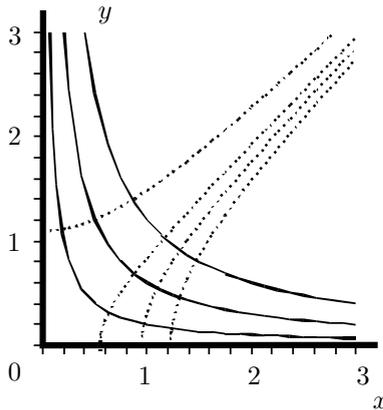
$$y = \frac{C5}{x}$$

Sur la figure ci-dessous sont représentées en traits pleins les lignes de courant et en traits pointillés les lignes équipotentielles.



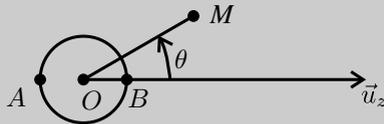
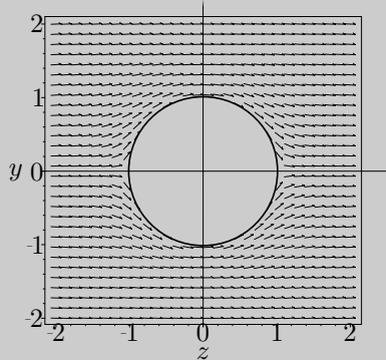
D'après les propriétés du gradient, le vecteur vitesse en un point M est orthogonal à la surface équipotentielle passant M .

3. On peut introduire des obstacles à condition de respecter les lignes de courant. Les obstacles peuvent être tangents aux lignes de courant. On peut avoir par exemple un coin à angle droit. On a alors les lignes de courant et lignes équipotentielles suivantes :



Exercice 20.2 : Écoulement perturbé par une sphère (PC-PSI)

On considère un écoulement permanent uniforme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R . On considère que l'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel. Le champ des vitesses ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.



1. Montrer que le potentiel des vitesses Φ vérifie $\Delta\Phi = 0$.
2. On cherche Φ sous la forme : $\Phi = \text{Arcos } \theta + \frac{B \cos \theta}{r^2} + C$. Déterminer A et B . Exprimer le vecteur vitesse en fonction de v_0, r, R et θ .
3. Dessiner l'allure des lignes équipotentielles.

Analyse du problème

On connaît la nature de l'écoulement. On a donc des relations permettant de calculer le potentiel des vitesses et d'en déduire le vecteur vitesse.

Cours : Nature de l'écoulement

L'écoulement est permanent (on dit aussi stationnaire), donc la masse volumique ne dépend pas du temps. L'équation de conservation de la masse s'écrit dans le cas général :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_m = 0, \text{ soit ici } \text{div } \vec{j}_m = 0.$$

L'écoulement est incompressible, donc la masse volumique est constante en tout point du fluide. On a alors $\text{div } \vec{v} = 0$.

L'écoulement est irrotationnel, donc $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$. On peut alors définir Φ le potentiel des vitesses par $\vec{v} = \text{grad } \Phi$ puisque $\text{rot } (\text{grad } \Phi) = \vec{0}$.



1. L'écoulement est incompressible, donc $\text{div } \vec{v} = 0$.

L'écoulement est irrotationnel, donc $\vec{v} = \text{grad } \Phi$.

On en déduit $\text{div} (\text{grad } \Phi) = 0$, soit :

$$\Delta \Phi = 0$$

Choix du système de coordonnées

On utilise les coordonnées sphériques d'axe Oz et de centre O . Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . La figure est invariante par rotation d'angle ϕ autour de l'axe Oz . Le vecteur vitesse et le potentiel des vitesses ne dépendent pas de ϕ . On vérifie ces propriétés sur la carte de champ des vitesses. La figure est représentée pour un angle ϕ quelconque.

Conditions aux limites

Si $r \rightarrow \infty$, alors l'écoulement n'est plus perturbé par la sphère et on doit retrouver le champ des vitesses $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$.

Sur la sphère on a $r = R$, le fluide doit suivre la sphère et ne peut pas pénétrer dans celle-ci. On doit donc avoir $v_r(r = R, \theta, \phi) = 0$.



Il faut connaître parfaitement le gradient en coordonnées sphériques ou le retrouver avec la définition $d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot \vec{dl}$:

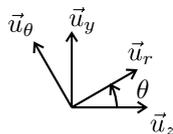
$$\text{grad } \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$



2. Le vecteur vitesse s'en déduit à partir du potentiel des vitesses :

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi = A \cos \theta \vec{u}_r - A \sin \theta \vec{u}_\theta - \frac{2B}{r^3} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{B \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

- **Première condition aux limites :** Si $r \rightarrow \infty$, alors $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$.
Il reste à projeter \vec{u}_z dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



D'après le schéma, on a : $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$.

D'où $v_0 \vec{u}_z = v_0 \cos \theta \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta = A \cos \theta \vec{u}_r - A \sin \theta \vec{u}_\theta$.

Cette relation doit être réalisée quel que soit θ , en particulier pour $\theta = 0$.

On a donc :

$$A = v_0$$

- **Deuxième condition aux limites :** Pour $r = R$, le point M se situe sur la sphère. On doit avoir $v_r = 0$, soit $A \cos \theta - \frac{2B \cos \theta}{R^3} = 0$. Comme $A = v_0$, on en déduit que :

$$B = \frac{v_0 R^3}{2}$$

Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta - \frac{v_0 R^3}{r^3} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{v_0 R^3 \sin \theta}{2r^3} \vec{u}_\theta$$

En simplifiant, on obtient finalement :

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \vec{u}_\theta$$

Interprétation physique :

L'écoulement est bien symétrique par rapport à Oz . Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient le même champ de vitesses.

Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie des vitesses.

Au point $A(r = R, \theta = \pi)$, le vecteur vitesse est nul. C'est bien un point d'arrêt.

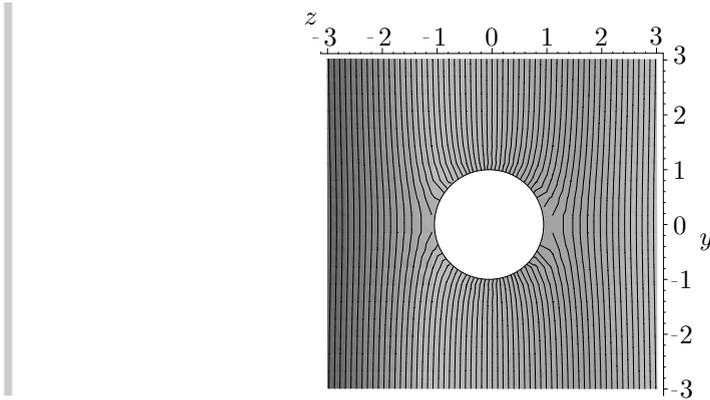
De même, le point $B(r = R, \theta = 0)$ est un point d'arrêt.

Remarque : D'après les propriétés du gradient, le vecteur vitesse en un point M est orthogonal à la surface équipotentielle passant M .



3. On en déduit directement l'allure des lignes équipotentielles. Les surfaces équipotentielles s'obtiennent par rotation d'angle ϕ autour l'axe Oz des lignes équipotentielles.

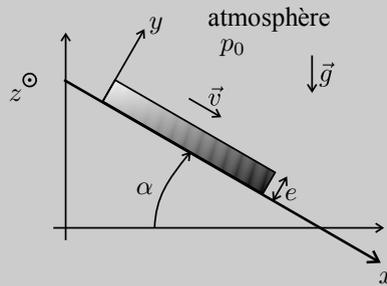
Si $r \rightarrow \infty$, la ligne équipotentielle tend vers une droite perpendiculaire à l'axe Oz puisque le vecteur vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$. Le vecteur vitesse en un point éloigné de la sphère est bien orthogonal à la ligne équipotentielle passant par M .



Exercice 20.3 : Écoulement sur un plan incliné (PC-PSI)

On considère un fluide de viscosité η , de masse volumique μ qui s'écoule sur un plan incliné d'angle α entre $z = 0$ et $z = L$. On néglige les forces de viscosité à l'interface entre le fluide et l'atmosphère. L'écoulement est stationnaire, homogène et incompressible. Le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$.

1. Exprimer p la pression du fluide en fonction de P_0, μ, g, α, y et e .
2. Exprimer $v(y)$ en fonction de μ, g, η, α, y et e .
3. En déduire le débit massique D_m .



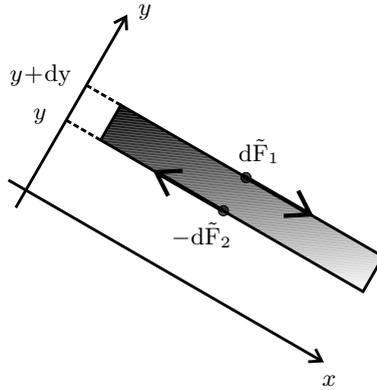
Analyse du problème

Dans cet exercice, le fluide n'est pas parfait puisqu'on tient compte des forces de viscosité. Il faut écrire l'équation de Navier-Stokes et la projeter pour obtenir des équations aux dérivées partielles. La difficulté est d'exprimer correctement les conditions aux limites.

On utilise les coordonnées cartésiennes avec Ox suivant le plan incliné afin de respecter les axes jouant un rôle important dans l'exercice.

Cours : Écoulement de cisaillement incompressible

On considère une particule de fluide $d\tau$. On suppose que la vitesse $v(y)$ est une fonction croissante de y .



On considère la surface $dx dz$ située en $y + dy$. Le fluide situé au dessus exerce sur cette surface une force orientée suivant \vec{u}_x . Cette force est appelée force de viscosité tangentielle. La loi de Newton s'écrit : $d\vec{F}_1 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} (y + dy) dx dz \vec{u}_x$. Cette force de viscosité est proportionnelle à la surface, à la dérivée partielle de la vitesse par rapport à y . Le coefficient de proportionnalité s'appelle la viscosité dynamique η .

On considère la surface $dx dz$ située en y . Le fluide situé au dessus exerce sur cette surface une force orientée suivant \vec{u}_x . La loi de Newton s'écrit : $d\vec{F}_2 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} (y) dx dz \vec{u}_x$. D'après le principe des actions réciproques, le fluide situé au dessous exerce sur cette surface une force $-d\vec{F}_2$.

On fait maintenant le bilan des forces de viscosité s'exerçant sur une particule de fluide de volume $d\tau$. Les deux forces sont $d\vec{F}_1$ et $-d\vec{F}_2$. La résultante est :

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= d\vec{F}_1 - d\vec{F}_2 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} (y + dy) dx dz \vec{u}_x - \eta \frac{\partial v}{\partial y} (y) dx dz \vec{u}_x \\ &= \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \vec{u}_x \end{aligned}$$

La résultante des forces de viscosité peut s'écrire :

$$d\vec{F} = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$



1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu \vec{a} = \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$$

L'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est nulle puisque l'écoulement est stationnaire.

L'accélération convective est : $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$.

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur que l'on peut exprimer avec les coordonnées cartésiennes :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \begin{pmatrix} v(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{v} = v(y) \frac{\partial v(y)}{\partial x} \vec{u}_x = \vec{0}$$



Attention à l'écriture de l'opérateur Laplacien vecteur. En coordonnées cartésiennes, l'opérateur Laplacien scalaire est :

$$\Delta U = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

L'opérateur Laplacien vecteur s'écrit : $\Delta \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix}$



Le Laplacien du vecteur vitesse est : $\Delta \vec{v} = \begin{cases} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \Delta v_y = 0 \\ \Delta v_z = 0 \end{cases}$

La projection de l'équation de Navier-Stokes dans la base des coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g \cos \alpha \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

D'après la troisième projection, la pression p ne dépend pas de z .

On utilise la deuxième projection pour exprimer la pression p en fonction de

y . On a donc $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x = -\mu g \cos \alpha$.

Cours : Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles

On utilise l'équation $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x = -\mu g \cos \alpha$. On travaille à x constant. On peut remplacer la dérivée partielle $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x$ par $\frac{dp}{dy}$, séparer les variables et intégrer. Attention, pour chaque valeur de x , on a une constante d'intégration. On a donc en fait une fonction $f(x)$ qui apparaît lors de l'intégration.



On travaille à x constant. La deuxième projection s'écrit : $\frac{dp}{dy} = -\mu g \cos \alpha$.

On sépare les variables :

$$dp = -\mu g(\cos \alpha)dy$$

L'intégration donne :

$$p(x, y) = -\mu g(\cos \alpha)y + f(x) \text{ (éq.1)}$$

Conditions aux limites

Le fluide est en contact avec l'atmosphère pour $y = e$. On a donc égalité des pressions pour $y = e$.

On doit donc avoir :

$$p(x, y = e) = p_0 = -\mu g(\cos \alpha)e + f(x) \text{ (éq.2)}$$

On fait la différence des équations (1) et (2). On obtient :

$$p - p_0 = -\mu g \cos \alpha (y - e)$$

2. On utilise la première projection de l'équation de Navier-Stokes pour

déterminer la vitesse $v(y)$: $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

D'après la question précédente, p ne dépend que de y . On a donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

L'équation différentielle se réduit à : $0 = \mu g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, soit

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta}$$

L'intégration donne : $\frac{dv}{dy} = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta}y + C_1$.

Une deuxième intégration fournit la vitesse :

$$v = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Conditions aux limites

- La première condition aux limites est pour $y = 0$. Le fluide est en contact avec le plan incliné, donc $v = 0$ et $C_2 = 0$.
- La deuxième condition aux limites est plus délicate à exprimer en $y = e$ puisqu'on ne connaît pas la vitesse pour $y = e$. Il faut trouver une condition sur la dérivée de la vitesse.



Il n'y a **pas de force de cisaillement ou de force de viscosité** sur l'interface fluide/air, donc $\frac{dv}{dy}(y = e) = 0$.



$$\frac{dv}{dy}(y = e) = 0 = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} e + C_1, \text{ soit } C_1 = \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} e.$$

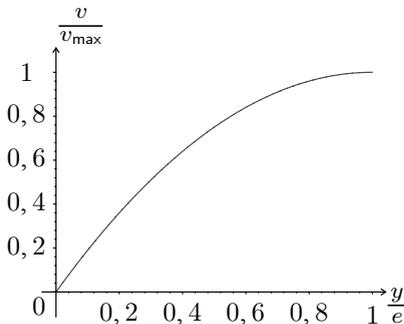
La vitesse s'écrit donc :

$$v = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \frac{y^2}{2} + \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} ye = \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \left(ye - \frac{y^2}{2} \right)$$

La vitesse maximale est obtenue pour $y = e$ et vaut :

$$v_{\max} = \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \frac{e^2}{2}$$

Le graphe représentant v en fonction de y est représenté ci-dessous.



On vérifie que $v = 0$ pour $y = 0$ et que la dérivée de la vitesse est nulle pour $y = e$.

Cours :

Le débit massique est défini par : $D_m = \iint \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$.

Le débit volumique est défini par $D_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$.



3. On considère une surface élémentaire orientée dans le sens de l'écoulement : $d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x$.

On a vu que $v = \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \left(ye - \frac{y^2}{2} \right)$.

On a donc : $D_m = \iint \mu \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \left(ye - \frac{y^2}{2} \right) dy dz$.

On intègre y entre 0 et e et z entre 0 et L .

On obtient : $D_m = \mu \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} L \left[\frac{y^2 e}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^e$, d'où :

$$D_m = \mu \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} L \left(\frac{e^3}{2} - \frac{e^3}{6} \right)$$

On en déduit finalement :

$$D_m = \frac{\mu^2 g L \sin \alpha e^3}{3 \eta}$$

Exercice 20.4 : Écoulement de Poiseuille dans un cylindre (PC-PSI)

On considère un cylindre horizontal de rayon R , de longueur L . Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$. On appelle μ la masse volumique et η la viscosité du fluide.

Le Laplacien du vecteur vitesse s'écrit :

$$\Delta \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z$$

L'écoulement est stationnaire et incompressible. On néglige les effets de la pesanteur. On appelle p_A la pression à l'entrée du cylindre ($z = 0$) et p_B la pression à la sortie du cylindre ($z = L$).

1. Déterminer la vitesse en fonction de p_A, p_B, L, η, R et r .
2. Déterminer le débit massique en fonction de p_A, p_B, η, L et R .

Analyse du problème

Dans cet exercice, on tient compte des forces de viscosité. Il faut donc écrire l'équation de Navier-Stokes. On pourra en déduire la pression et la vitesse en tout point du fluide. La difficulté est de résoudre les équations aux dérivées partielles et de bien déterminer les conditions aux limites.



1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

On néglige les effets de la pesanteur, ce qui revient à négliger $\mu \vec{g}$ devant les autres forces volumiques.

Le Laplacien du vecteur vitesse est $\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_z$.

L'opérateur dans la dérivée convective s'écrit :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \bullet = v(r) \vec{u}_z \cdot \frac{\partial \bullet}{\partial z} \vec{u}_z = v(r) \frac{\partial \bullet}{\partial z}$$

Comme $v_x = v_y = 0$ et v_z ne dépend que de r , l'accélération convective est :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \begin{cases} v(r) \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \\ v(r) \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ v(r) \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La projection de l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{cases}$$

La pression ne dépend pas de r et de θ . Elle ne dépend que de z . La vitesse ne dépend que de r d'après l'énoncé. On peut donc remplacer les dérivées partielles par des dérivées « droites ». On a alors :

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Cours : Soit f une fonction ne dépendant que de z et g une fonction ne dépendant que de r . Comment exploiter la relation $f(z) = g(r)$ valable $\forall r$ et $\forall z$?

- La dérivée partielle par rapport à z s'écrit $\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)_r = \left(\frac{\partial g(r)}{\partial z} \right)_r$. Elle est nulle car g ne dépend que de r . On en déduit que f ne dépend pas de z . Comme f ne dépend pas de r , la fonction f est donc constante.

- La dérivée partielle par rapport à r s'écrit : $\left(\frac{\partial f(z)}{\partial r}\right)_z = \left(\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right)_z$. Elle est nulle car f ne dépend que z . On en déduit que g dépend pas de r . Comme g ne dépend pas de z , la fonction g est donc constante.

On a donc $f(z) = A$ et $g(r) = A$ avec A une constante.



La relation $\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$ est valable $\forall r$ et $\forall z$.

On doit donc avoir deux relations :

$$\frac{dp}{dz} = A \text{ (eq.1)}$$

et

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = A \text{ (eq.2)}$$

avec A une constante que l'on va déterminer au cours de la résolution.

Première équation :

$\frac{dp}{dz} = A$. En intégrant, on a : $p = Az + B$. D'après l'énoncé, $p = p_A$ pour $z = 0$ et $p = p_B$ pour $z = L$. On a donc $B = p_A$ et $p_B = AL + p_A$, soit

$$A = \frac{p_B - p_A}{L}$$

La pression est donc :

$$p = \frac{p_B - p_A}{L} z + p_A$$

Deuxième équation :

La séparation des variables donne : $d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{Ar}{\eta} dr$.

En intégrant, on a : $r \frac{dv}{dr} = \frac{Ar^2}{2\eta} + C$, soit :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{Ar}{2\eta} + \frac{C}{r}$$



Argument physique pour déterminer une constante d'intégration : dans le cylindre, la vitesse et la dérivée de la vitesse doivent rester finies.

Si $r \rightarrow 0$, la dérivée de la vitesse doit rester finie, donc la constante d'intégration C est nulle.

$$\text{On a donc : } \frac{dv}{dr} = \frac{(p_B - p_A)}{2\eta L} r.$$

$$\text{On intègre une deuxième fois : } v = \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} r^2 + D \text{ (eq.3).}$$

Remarque : Autre argument physique pour déterminer une constante d'intégration : La vitesse est nulle pour $r = R$ car le fluide accroche à la paroi à cause des forces de viscosité.



$$\text{On doit avoir } 0 = \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} R^2 + D \text{ (eq.4).}$$

En faisant la différence (eq.3) - (eq.4), on en déduit la vitesse :

$$v = \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

2. Le débit massique est défini par : $D_m = \iint \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$.

On considère une surface élémentaire orientée dans le sens de l'écoulement : $\vec{dS} = dr r d\theta \vec{u}_z$.

$$\text{On a alors : } D_m = \iint_S \mu v(r) dr r d\theta = \int_{r=0}^R \mu v(r) dr r \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta.$$

Soit :

$$D_m = \int_{r=0}^R \mu \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} (r^2 - R^2) 2\pi r dr = \mu \frac{\pi (p_B - p_A)}{2 \eta L} \left[\frac{r^4}{4} - R^2 \frac{r^2}{2} \right]_0^R.$$

On obtient :

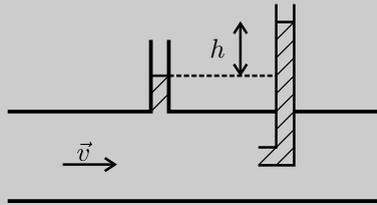
$$D_m = \mu \frac{\pi (p_B - p_A)}{2 \eta L} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2} \right) = \frac{\mu \pi (p_A - p_B)}{8 \eta L} R^4$$

C'est la loi de Poiseuille pour laquelle le débit massique est proportionnel à R^4 et proportionnel à $\frac{1}{L}$. On vérifie que $p_A > p_B$ si $D_m > 0$. On a bien une baisse de la pression dans le cylindre.

Équation d'Euler et théorèmes de Bernoulli

Exercice 21.1 : Tube de Pitot (PC-PSI)

On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible. Exprimer la vitesse v en fonction de g et de h .



Cours : Théorèmes de Bernoulli

Il existe deux versions très importantes des théorèmes de Bernoulli selon la nature de l'écoulement.

- Ecoulement homogène, parfait, permanent, incompressible, irrotationnel (HPPII),

$$\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte \text{ en tout point de l'écoulement.}$$

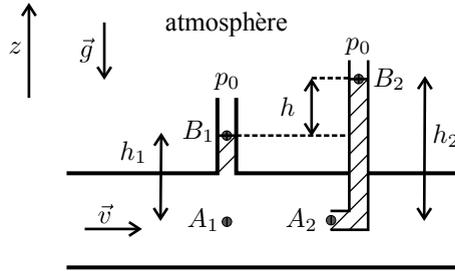
- Ecoulement homogène, parfait, permanent, incompressible (HPPI), $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$ sur une ligne de courant. Attention la constante ne prend pas la même valeur sur une autre ligne de courant.

Attention à bien vérifier que l'axe Oz est bien orienté vers le haut. Dans ce cas, on a $+gz$ dans le théorème de Bernoulli.

Si l'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans la direction verticale.



1.

 $A_1 \rightarrow A_2$

L'écoulement est homogène, parfait, permanent et incompressible (HPPI). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant horizontale $A_1 \rightarrow A_2$. Le point A_2 est un point d'arrêt. La vitesse est donc nulle en ce point. Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{p_{A1}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A1}^2 + gz_{A1} = \frac{p_{A2}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A2}^2 + gz_{A2}$$

Le vecteur vitesse au point A_1 est \vec{v} . On a donc :

$$p_{A2} - p_{A1} = \frac{1}{2}\mu v^2 \text{ (eq.1)}$$

 $A_1 \rightarrow B_1$

L'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales. On peut donc appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles : $\frac{p_{A1}}{\mu} + gz_{A1} = \frac{p_{B1}}{\mu} + gz_{A2}$. Le point B_1 est en contact avec l'air. On a donc $p_{B1} = p_0$. Soit :

$$p_{A1} = p_0 + \mu gh_1 \text{ (eq.2)}$$

 $A_1 \rightarrow B_2$

La vitesse est nulle au point A_2 et la pression au point B_2 vaut p_0 puisque le fluide est en contact avec l'atmosphère. Le fluide est immobile. On peut donc appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles :

$$p_{A2} = p_0 + \mu gh_2 \text{ (eq.3)}$$

On fait la différence (eq.3) - (eq.1). On obtient :

$$p_{A2} - p_{A1} = \mu g (h_2 - h_1) = \mu gh$$

En utilisant l'équation 1 : $p_{A2} - p_{A1} = \frac{1}{2}\mu v^2$, on en déduit :

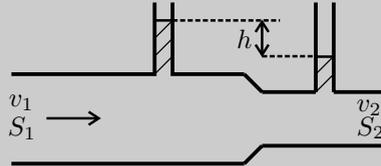
$$v = \sqrt{2gh}$$

Cette relation permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide à partir de la hauteur h .

Exercice 21.2 : Débitmètre (PC-PSI)

On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible.

1. Exprimer le débit volumique en fonction de S_1, S_2, g et h .
2. Si $S_2 < S_1$, comparer les pressions à l'entrée et à la sortie de la canalisation.



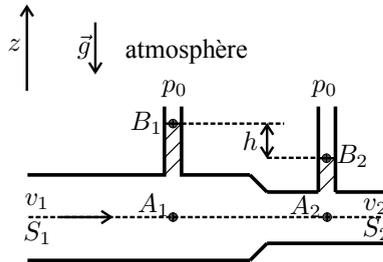
Analyse du problème

Avant d'appliquer le théorème de Bernoulli, il faut bien regarder si toutes les hypothèses sont bien vérifiées. Si l'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation de la statique des fluides dans la direction verticale.

Comme l'écoulement est incompressible, on utilisera la conservation du débit volumique.



1.



$A_1 \rightarrow A_2$

L'écoulement est homogène, parfait, permanent et incompressible (HPPI). On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \rightarrow A_2$, soit :

$$\frac{p_{A_1}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{p_{A_2}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_2}^2 + gz_{A_2}$$

On en déduit :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = +\frac{1}{2}\mu(v_2^2 - v_1^2) \text{ (eq.1)}$$

Conservation du débit volumique

L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \text{ (eq.2)}$$

 $A_1 \rightarrow B_1$ et $A_2 \rightarrow B_2$

L'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles dans la direction verticale, donc :

$$p_{A_1} = p_{B_1} + \mu g h_1$$

On peut appliquer la même relation pour $A_2 \rightarrow B_2$, soit

$$p_{A_2} = p_{B_2} + \mu g h_2$$

Les points B_1 et B_2 sont en contact avec l'atmosphère, donc $p_{B_1} = p_{B_2} = p_0$. On en déduit que :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = \mu g h \text{ (eq.3)}$$

Des équations (1) et (3), on en déduit :

$$\mu g h = \frac{1}{2} \mu (v_2^2 - v_1^2)$$

En utilisant l'équation (2), on a :

$$2gh = \left(\left(\frac{v_1 S_1}{S_2} \right)^2 - v_1^2 \right) = v_1^2 \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)$$

Soit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1}}$$

Le débit volumique est :

$$D_V = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

2. Si $S_2 < S_1$, alors $v_2 > v_1$ d'après la conservation du débit volumique. D'après le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \rightarrow A_2$, on a

$$p_{A_2} < p_{A_1}$$

Un rétrécissement du conduit provoque une dépression.

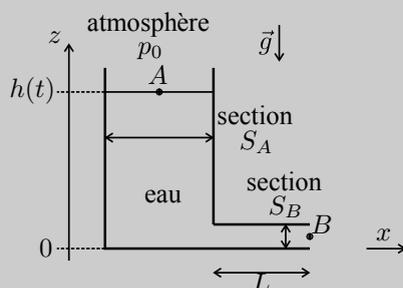
Cet effet s'appelle l'effet Venturi. Exemple d'application : trompe à eau utilisée en chimie.

Exercice 21.3 : Régime transitoire de la vidange d'un réservoir (PC-PSI)

On considère un réservoir cylindrique de section S_A et de hauteur $h(t)$. A $t = 0$, $h(t) = h_0$. L'écoulement est homogène, parfait et incompressible. On étudie le régime transitoire de la vidange du réservoir dans un tube de section S_B et de longueur L . On suppose que $S_A \gg S_B$.

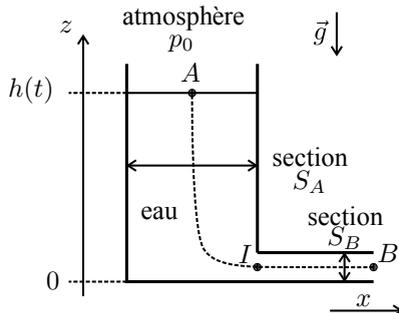
1. On suppose que dans le tube, le vecteur vitesse est $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$. Montrer que v ne dépend pas de x .
2. Montrer que la vitesse dans le réservoir est négligeable devant v .
3. Exprimer v en fonction du temps en supposant que le niveau dans le réservoir n'ait quasiment pas varié.

On rappelle que $\int \frac{1}{1-u^2} = \text{Argth } u + cte$.



Analyse du problème

Il s'agit d'un problème de mécanique des fluides en régime transitoire. Comme l'écoulement est incompressible, on peut appliquer la conservation du débit volumique en régime transitoire. On définit un axe Ox et une ligne de courant reliant A et B . On pourra appliquer l'équation d'Euler et la projeter sur cette ligne de courant.



1. L'écoulement est incompressible. Dans le tube, on a $\text{div}(\vec{v}) = 0$. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

On en déduit que v ne dépend pas de x .

2. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique. Au point A , le débit volumique est $v_A S_A$. En B , le débit volumique est $v_B S_B$. On a donc $v_A S_A = v_B S_B$, soit

$$v_A = v_B \frac{S_B}{S_A}$$

Comme $S_A \gg S_B$, alors

$$v_A \ll v_B$$

La vitesse dans le réservoir est donc négligeable devant la vitesse dans le tube.

3. Pour trouver l'équation différentielle de la vitesse, on écrit l'équation d'Euler que l'on va projeter sur la ligne de courant $A \rightarrow B$.

Cours : Projection de l'équation d'Euler sur une ligne de courant

L'équation d'Euler est :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \mu \vec{g}$$

On projette sur une ligne de courant avec \vec{v} et \vec{dl} colinéaires.



Attention : Sur une ligne de courant, \vec{v} et \vec{dl} sont colinéaires mais on n'a pas $\vec{dl} = \vec{v} dt$ car on travaille avec une description eulérienne et non lagrangienne !

Cours :

On a alors :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{dl} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot \vec{dl} + \mu \vec{g} \cdot \vec{dl}$$

On peut effectuer plusieurs simplifications :

- $((\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}) \cdot \vec{dl} = 0$ car $((\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v})$ est un vecteur orthogonal au vecteur vitesse.
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2} \cdot \vec{dl} = d \left(\frac{v^2}{2} \right)$ d'après la définition du gradient : $dU = \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \cdot \vec{dl}$.
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot \vec{dl} = dp$
- $\mu \vec{g} \cdot \vec{dl} = -\mu g dz$

On intègre sur la ligne de courant $A \rightarrow B$:

$$\mu \left[\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} \right] = -(p_B - p_A) - \mu g (z_B - z_A)$$

Remarque : La surface latérale du jet libre est en contact avec l'atmosphère. Si l'écoulement est parfait, horizontal et si on néglige l'influence de la pesanteur sur la petite section S_B , la pression est uniforme en sortie et égale à $p_B = p_0$.



Analyse des différents termes :

- Sur la ligne de courant $A \rightarrow I$, la vitesse est négligeable et la dérivée de la vitesse est quasi nulle. Il reste à intégrer sur la ligne de courant $I \rightarrow B$. On peut sortir $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ de l'intégrale puisque la vitesse ne dépend pas de x . On note v la vitesse dans le tube. Comme la vitesse v ne dépend que de t , on peut remplacer la dérivée partielle par rapport au temps par une dérivée droite. On a alors :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \frac{dv}{dt} L$$

- On a vu que la vitesse en A est négligeable devant la vitesse en B , donc $\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} \approx \frac{v^2}{2}$.
- Le point A est en contact avec l'atmosphère, donc $p_A = p_0$. On a donc $p_B - p_A = 0$.
- $-\mu g (z_B - z_A) = \mu gh$. D'après l'énoncé, on suppose que la hauteur du réservoir n'a quasiment pas varié, donc $h = h_0$.

La projection de l'équation d'Euler sur une ligne de courant entre $A \rightarrow B$ s'écrit :

$$\mu \frac{dv}{dt} L + \mu \frac{v^2}{2} = \mu gh_0$$

Pour résoudre cette équation différentielle non linéaire, on transforme l'équation pour utiliser l'intégrale proposée dans l'énoncé.

$$\frac{L}{gh_0} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{v^2}{2gh_0}$$

On sépare les variables :

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{2gh_0}} = \frac{gh_0}{L} dt$$

Pour utiliser l'intégrale de l'énoncé, on pose $u = \frac{v}{\sqrt{2gh_0}}$ et $du = \frac{dv}{\sqrt{2gh_0}}$.

On a alors :

$$\sqrt{2gh_0} \frac{du}{1-u^2} = \frac{gh_0}{L} dt$$

On intègre cette équation non linéaire :

$$\text{Argth}(u) = \sqrt{\frac{gh_0}{2L^2}} t + cte$$

Pour $t = 0, v = 0$, donc $cte = 0$. On pose

$$\tau = \sqrt{\frac{2L^2}{gh_0}}$$

On a donc : $\text{Argth}\left(\frac{v}{\sqrt{2gh_0}}\right) = \frac{t}{\tau}$, soit :

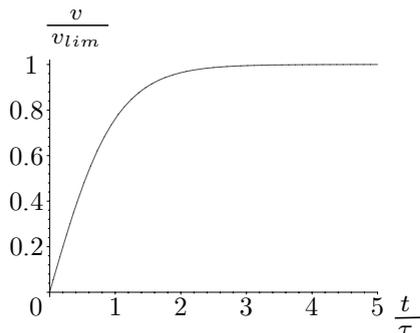
$$v = \sqrt{2gh_0} \text{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Interprétation physique

Si $t \rightarrow \infty$, alors

$$v \rightarrow v_{lim} = \sqrt{2gh_0}$$

Ce résultat est prévisible en appliquant le théorème de Bernoulli en régime stationnaire sur la ligne de courant $A \rightarrow B$. C'est la formule de Torricelli. On vérifie que τ est bien homogène à un temps. Plus la longueur du tube est grande, plus la constante de temps est grande.



Au bout de quelques τ , le régime permanent est atteint.

Exercice 21.4 : Cyclone et écoulement tourbillonnaire (PC-PSI)

À l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz , de rayon R , l'écoulement de l'air est homogène, parfait, permanent, incompressible et tourbillonnaire. On définit à l'intérieur de ce cylindre (appelé oeil du cyclone) le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ avec $\Omega = cte$.

À l'extérieur du cylindre, l'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel. On note p_0 la pression infiniment loin du cylindre.

Les lignes de courant sont des cercles. On admet que $\vec{v} = v(r) \vec{u}_\theta$. On néglige les effets de la pesanteur.

On rappelle que :

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. Exprimer v en fonction de r, R et Ω par deux méthodes.
2. Déterminer la pression p en négligeant les effets de la pesanteur.

Analyse du problème

L'écoulement est tourbillonnaire à l'intérieur du cylindre. Pour déterminer la vitesse à l'intérieur du cylindre, on pourra utiliser le rotationnel en coordonnées cylindriques ou calculer la circulation du vecteur vitesse par analogie avec la magnéto-statique.

Pour déterminer la pression, on pourra appliquer le théorème de Bernoulli à condition de bien vérifier les hypothèses d'application, sinon on revient à l'équation d'Euler.



Il faut bien connaître la définition du vecteur rotation :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$$



1. Première méthode pour calculer v : utilisation du rotationnel

Comme $\vec{v} = v(r) \vec{u}_\theta$, le rotationnel du vecteur vitesse s'écrit en projection sur \vec{u}_z : $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r))$.

- **1^{er} cas** : $r \leq R$. On a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r)) = 2\Omega$$

On sépare les variables : $d(rv) = 2\Omega r dr$

L'intégration donne : $rv = \Omega r^2 + C_1$. Soit :

$$v = r\Omega + \frac{C_1}{r}$$

Si $r \rightarrow 0$, la vitesse est nécessairement définie, alors $C_1 = 0$.
 A l'intérieur du cylindre, la vitesse est donc :

$$v = r\Omega$$

• **2^{ème} cas** : $r \geq R$. On a :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r)) = 0$$

On a donc $rv = C_2$, soit $v = \frac{C_2}{r}$.

La vitesse est nécessairement continue pour $r = R$, donc $\frac{C_2}{R} = R\Omega$. On en déduit donc la constante d'intégration :

$$C_2 = R^2\Omega$$

La vitesse à l'extérieur du cylindre est :

$$v = \frac{R^2\Omega}{r}$$

Deuxième méthode : Calcul de la circulation du vecteur vitesse

Cours :

On utilise le même raisonnement qu'en magnétostatique avec un cylindre infini parcouru par des courants volumiques uniformes portés par l'axe du cylindre.

En magnétostatique, on a $\text{div} \vec{B} = 0$ et $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

En mécanique des fluides, on a dans cet exercice : $\text{div} \vec{v} = 0$ et $\text{rot} \vec{v} = 2\vec{\Omega}$.

On a donc l'analogie suivante : $\vec{B} \rightarrow \vec{v}$ et $\mu_0 \vec{j} \rightarrow 2\vec{\Omega}$.

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

L'équivalent du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$$



Comme pour le théorème d'Ampère, on considère un contour Γ , c'est-à-dire une courbe fermée orientée. Ici, on prend un cercle passant par M , de rayon r et orienté suivant \vec{u}_θ .

La circulation du vecteur vitesse sur le contour Γ est :

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = \oint v(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = v(r) r \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = v(r) 2\pi r$$

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_S 2\vec{\Omega} \cdot \vec{dS}$$

Le vecteur \vec{dS} est orienté par la règle de la main droite. On a donc $\vec{dS} = (dr) (r d\theta) \vec{u}_z$.

Il y a deux cas pour calculer le flux du vecteur tourbillon :

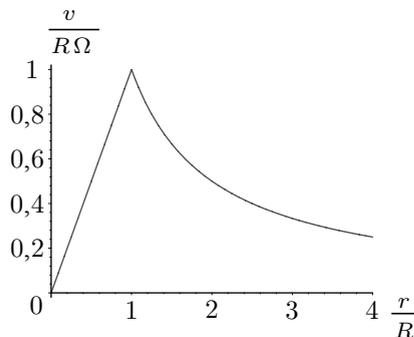
- **1^{er} cas** : $r \leq R$. Il faut intégrer entre 0 et r et l'angle θ entre 0 et 2π .
On a donc : $v(r) 2\pi r = 2\Omega\pi r^2$, soit :

$$v = r\Omega$$

- **2^{ème} cas** : $r \geq R$. Attention, le vecteur tourbillon est nul à l'extérieur. Par contre, il n'est pas nul à l'intérieur du disque de rayon R . Il faut donc intégrer entre 0 et R et l'angle θ entre 0 et 2π . On a donc :
 $v(r) 2\pi r = 2\Omega\pi R^2$, soit :

$$v = \frac{R^2\Omega}{r}$$

On retrouve bien les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.



L'utilisation du théorème de Stokes : $\oint \vec{a} \cdot \vec{dl} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{dS}$ est fréquente en physique : théorème d'Ampère en magnétostatique, circulation du vecteur vitesse pour un écoulement rotationnel, circulation du potentiel vecteur \vec{A} ... S est une surface qui s'appuie sur le contour Γ et orientée avec la règle de la main droite. Attention : mêmes les gauchers doivent utiliser la main droite !

2. À l'extérieur du cylindre :

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel (HPPII). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli.

La quantité $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$ est constante en tout point de l'écoulement. Si $r \rightarrow \infty$, alors la vitesse est nulle et la pression tend vers p_0 . On reste à la même altitude, donc :

$$\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\mu}$$

On a vu dans la question précédente que $v = \frac{R^2\Omega}{r}$. On a :

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\mu\frac{R^4\Omega^2}{r^2}$$

À l'intérieur du cylindre :

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et rotationnel. On pourrait appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant mais pour chaque cercle, on aurait une constante différente. Cette méthode ne permet pas de calculer la pression.

Il faut donc revenir à l'équation d'Euler.

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \vec{g}$$

On est en régime permanent donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. A l'intérieur du cylindre :

$\text{rot } \vec{v} = 2\Omega \vec{u}_z$. On néglige les effets de la pesanteur.

On a donc :

$$\mu \left(\text{grad} \left(\frac{r^2\Omega^2}{2} \right) + 2\Omega \vec{u}_z \wedge r\Omega \vec{u}_\theta \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$$

Soit :

$$\mu r \Omega^2 \vec{u}_r - \mu 2r \Omega^2 \vec{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$$

On peut projeter dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$$\begin{cases} -\mu r \Omega^2 = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

La pression ne dépend pas de θ et de z . On peut remplacer $\frac{\partial p}{\partial r}$ par $\frac{dp}{dr}$. On a alors :

$$-\mu r \Omega^2 = -\frac{dp}{dr}$$

Il reste à séparer les variables :

$$dp = \mu r \Omega^2 dr$$

On intègre :

$$p = \mu \frac{r^2}{2} \Omega^2 + cte$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on se place en $r = R$ puisque la pression est continue en tout point de l'espace. On doit donc avoir :

$$p_0 - \frac{1}{2} \mu \frac{R^4 \Omega^2}{R^2} = \mu \frac{R^2}{2} \Omega^2 + cte$$

Soit :

$$cte = p_0 - \mu R^2 \Omega^2$$

On en déduit la pression à l'intérieur du cylindre :

$$p = \mu \frac{r^2}{2} \Omega^2 + (p_0 - \mu R^2 \Omega^2)$$

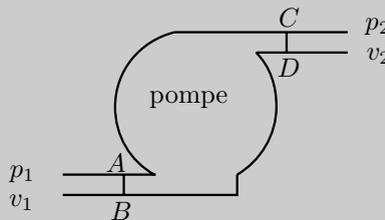


Bilans dynamiques et thermodynamiques

Exercice 22.1 : Pompe et dénivellation (PC-PSI)

On considère un écoulement homogène, parfait, permanent, incompressible. On appelle D_m le débit massique. Calculer la puissance à fournir à la pompe pour que l'eau franchisse la dénivellation de hauteur H en fonction de D_m, μ, p_1, p_2, g et H .

On appelle p_1, v_1 la pression et la vitesse de l'eau à l'entrée de la pompe et p_2, v_2 la pression et la vitesse de l'eau à la sortie de la pompe. La section S_1 à l'entrée de la pompe est égale à la section S_2 en sortie.



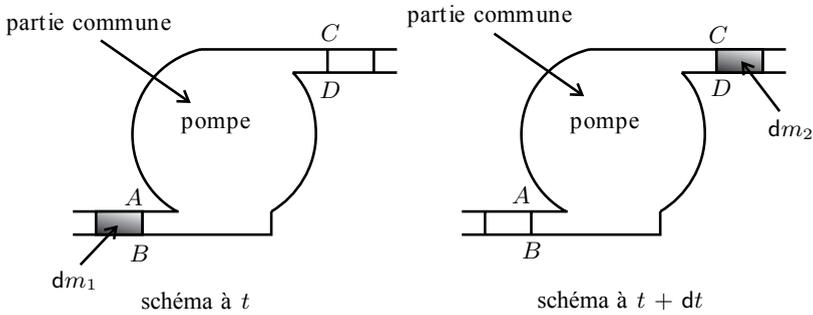
Analyse du problème

Il faut effectuer des bilans pour calculer la puissance. On ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli car on ne peut pas définir de ligne de courant à l'intérieur de la pompe. Le raisonnement sur les systèmes ouverts est très important et peut s'appliquer pour le premier principe, le deuxième principe de la thermodynamique, le théorème de la quantité de mouvement, le théorème du moment cinétique, le théorème de l'énergie cinétique...

Cours : Méthode pour effectuer des bilans avec des systèmes ouverts

On considère un régime **permanent** d'écoulement avec **une entrée et une sortie**. Le fluide compris entre AB et CD est un système ouvert. On ne peut pas appliquer le premier principe de la thermodynamique. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .



On a bien un système fermé. On note avec un indice les différentes grandeurs de la partie commune : énergie interne U_{PC} , énergie mécanique E_{mPC} , masse m_{PC} ...
 Comme on est en régime permanent, les différentes grandeurs de la partie commune sont les mêmes à t et à $t + dt$. On a donc :

$$U_{PC}(t) = U_{PC}(t + dt)$$

$$E_{mPC}(t) = E_{mPC}(t + dt)$$

$$M_{PC}(t) = M_{PC}(t + dt)$$

Conservation de la masse :

La masse du système fermé est la même à t et à $t + dt$:

- Masse du système fermé à t : $M_{PC}(t) + dm_1$.
- Masse du système fermé à $t + dt$: $M_{PC}(t + dt) + dm_2$.

Comme $M_{PC}(t) = M_{PC}(t + dt)$, on a donc :

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

On note par la suite dm la masse qui rentre pendant dt et qui est aussi égale à la masse qui sort pendant dt . Le débit massique vaut $D_m = \frac{dm}{dt}$. On a conservation du débit massique puisque l'écoulement est permanent.

Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent :

On applique le premier principe de la thermodynamique au système fermé Σ défini précédemment pendant dt :

$$dU + dE_m = \delta W + \delta Q$$

Calcul de la variation d'énergie interne :

$$dU = U_{\Sigma}(t + dt) - U_{\Sigma}(t)$$

- $U_{\Sigma}(t) = U_{PC}(t) + dm u_1$. L'énergie interne de la masse qui rentre pendant dt s'exprime avec l'énergie interne massique u_1 à l'entrée et dm la masse qui rentre pendant dt .
- $U_{\Sigma}(t + dt) = U_{PC}(t + dt) + dm u_2$.

En régime permanent, u_1 et u_2 sont indépendants du temps et $U_{PC}(t) = U_{PC}(t + dt)$. On a donc :

$$dU = dm (u_2 - u_1)$$

Calcul de la variation d'énergie mécanique :

$$dE_m = E_{m\Sigma}(t + dt) - E_{m\Sigma}(t)$$

- $E_{m\Sigma}(t) = E_{mPC}(t) + \frac{1}{2}dmv_1^2 + dmgz_1$.
- $E_{m\Sigma}(t + dt) = E_{mPC}(t + dt) + \frac{1}{2}dmv_2^2 + dmgz_2$.

On a vu qu'en régime permanent $E_{mPC}(t) = E_{mPC}(t + dt)$, on a donc :

$$dE_m = dm \left(\frac{1}{2}v_2^2 + g z_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - g z_1 \right)$$

Calcul du transfert thermique :

On appelle q le **transfert thermique massique algébriquement reçu** par le système Σ pendant dt . On a alors :

$$\delta Q = q dm$$

Calcul du travail :

Il y a trois termes : travail des forces de pression à l'entrée, travail des forces de pression à la sortie et travail autre que celui des forces pression (appelé travail indiqué ou travail utile). Dans tous les cas, c'est un **travail algébriquement reçu** de l'extérieur.

- Travail des forces de pression à l'entrée : c'est un travail positif car les forces de pression sont motrices. On définit un axe Ox orienté vers la droite. La force de pression est $\vec{F}_1 = p_1 S_1 \vec{u}_x$. Le travail élémentaire vaut : $\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{dl}_1 = p_1 S_1 dl_1$. On peut exprimer le volume $S_1 dl_1$ de la masse qui rentre pendant dt en fonction de la masse volumique μ . On a donc :

$$\delta W_1 = \frac{p_1}{\mu_1} dm$$

- Travail des forces de pression à la sortie : c'est un travail négatif car les forces de pression sont résistantes. On définit un axe Ox orienté vers la droite. La force de pression est $\vec{F}_2 = -p_2 S_2 \vec{u}_x$. Le travail élémentaire vaut : $\delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{dl}_2 = -p_2 S_2 dl_2$. On peut exprimer le volume $S_2 dl_2$ de la masse qui sort pendant dt en fonction de la masse volumique μ . On a donc :

$$\delta W_2 = \frac{p_2}{\mu_2} dm$$

Le travail indiqué peut s'exprimer en fonction du travail indiqué massique w_i . w_i est le travail massique fourni aux parties mobiles de la machine. Il est algébriquement reçu par le fluide. $w_i > 0$ pour un compresseur et $w_i < 0$ pour une turbine.

On a donc :

$$\delta W = \frac{P_1}{\mu_1} dm - \frac{P_2}{\mu_2} dm + w_i dm$$

Le premier principe s'écrit :

$$dm \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - g z_1 \right) = dm \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} + w_i + q \right)$$

Tout se passe comme si une masse dm passait de l'état 1 à l'état 2.

On simplifie par dm et on fait apparaître l'enthalpie massique définie par

$$h = u + \frac{P}{\mu}$$

Remarque : L'inverse de la masse volumique est le volume massique qui est peu utilisé en mécanique des fluides. De plus la notation habituelle en thermodynamique du volume massique v est utilisée ici pour désigner la vitesse...

On a donc :

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) = w_i + q$$

C'est une expression que l'on peut appliquer par coeur à condition de bien connaître les hypothèses : régime permanent d'écoulement pour un système ouvert à une entrée et une sortie.

Si on multiplie par dm et on divise par dt . On a :

$$D_m \left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) \right) = P_i + P_{th}$$

P_i est la puissance indiquée, c'est à dire $P_i = \frac{dm w_i}{dt}$ et P_{th} est la puissance thermique algébriquement reçue.



L'écoulement est parfait. La transformation est donc adiabatique et réversible, c'est à dire isentropique.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour la pompe en régime permanent :

$$D_m \left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) \right) = P_i + P_{th}$$

$P_{th} = 0$ car la transformation est adiabatique.

P_i est la puissance à fournir à la pompe, que l'on va noter P . Pour un compresseur, on a $P > 0$ alors que pour une turbine, on a $P < 0$.

Pour calculer $h_2 - h_1$, on utilise l'identité thermodynamique : $dH = TdS + Vdp$. On divise par la masse pour passer en grandeurs massiques. Le volume massique est l'inverse de la masse volumique. On a donc :

$$dh = Tds + \frac{1}{\mu}dp$$

$ds = 0$ car la transformation est isentropique. On intègre entre l'état 1 et l'état 2, soit : $h_2 - h_1 = \frac{1}{\mu}(p_2 - p_1)$.

On a :

$$P = D_m \left(\frac{1}{\mu}(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 + gH \right)$$

L'écoulement est incompressible. On a donc conservation du débit volumique :

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

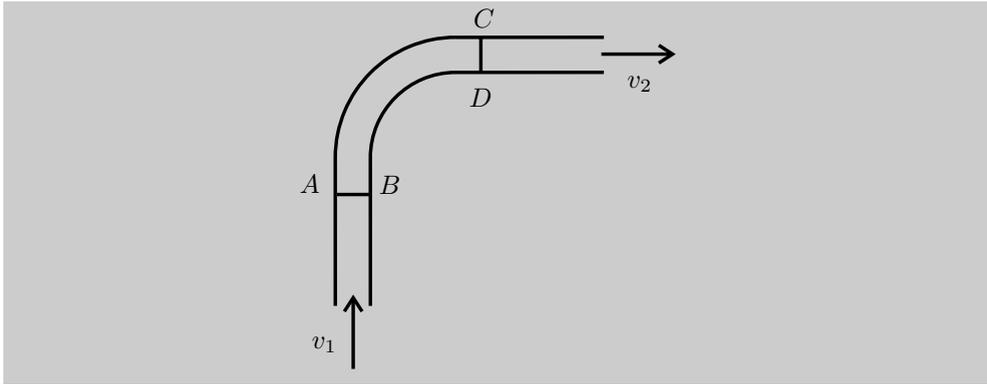
Comme $S_1 = S_2$, alors $v_1 = v_2$. On en déduit finalement :

$$P = D_m \left(\frac{1}{\mu}(p_2 - p_1) + gH \right)$$

Exercice 22.2 : Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé (PC-PSI)

On considère un tuyau coudé horizontal de section S constante. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent, incompressible. On néglige les variations d'altitude dans le tuyau. On appelle v_1 et v_2 respectivement les vitesses à l'entrée et à la sortie du tuyau. On appelle p_1 et p_2 les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie du tuyau. On suppose que la pression est uniforme à l'entrée et à la sortie du tuyau.

1. Montrer que $p_1 = p_2$.
2. Exprimer la force exercée par le fluide sur le coude dans le plan horizontal en fonction de D_v, μ, S , et p_1 .



Analyse du problème

On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant puisque les hypothèses HPPI sont vérifiées. Le fluide compris entre AB et CD est un système ouvert. Il faut donc se ramener à un système fermé pour appliquer le théorème de la quantité de mouvement.



1. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique : $D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$. Comme $S_1 = S_2$, on a donc $v_1 = v_2$ que l'on appellera v dans la deuxième question.

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible (HPPI). Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie :

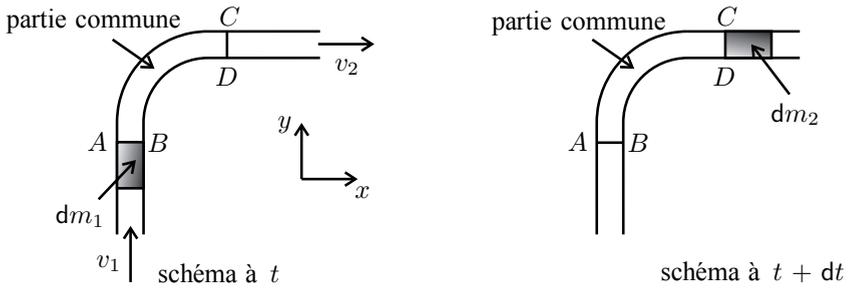
$$\frac{p_2}{\mu} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\mu} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1$$

On néglige les variations d'altitude dans le tuyau, donc $z_1 = z_2$. Comme $v_1 = v_2$, on a donc : $p_1 = p_2$.

2. Définition du système fermé :

On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement à un système ouvert. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .



Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à $t + dt$: $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$.

On a conservation du débit massique, donc $dm_1 = dm_2 = dm$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm \vec{v}_1$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm \vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = dm (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $p_1 S \vec{u}_y$.
- Force de pression à la sortie : $-p_2 S \vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m \vec{g}$.
- Force que le coude exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force \vec{F} que l'eau exerce sur le coude.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = p_1 S \vec{u}_y - p_2 S \vec{u}_x + m \vec{g} - \vec{F}$$

On a donc :

$$\vec{F} = p_1 S \vec{u}_y - p_2 S \vec{u}_x + m \vec{g} - D_m (v_2 \vec{u}_x - v_1 \vec{u}_y)$$

Le débit massique est $D_m = \mu S v$. On en déduit :

$$\vec{F} = (p_1 S + \mu S v^2) \vec{u}_y - (p_2 S + \mu S v^2) \vec{u}_x + m \vec{g}$$

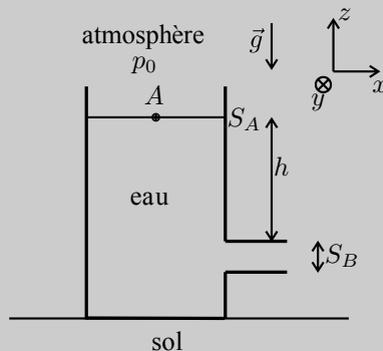
Le débit volumique est $D_v = S v$, on a donc : $v^2 = \frac{D_v^2}{S^2}$. Comme $p_2 = p_1$, la force \vec{F}' que le fluide exerce sur le coude dans le plan horizontal est donc :

$$\vec{F}' = \left(p_1 S + \mu \frac{D_v^2}{S} \right) \vec{u}_y - \left(p_1 S + \mu \frac{D_v^2}{S} \right) \vec{u}_x$$

Exercice 22.3 : Force subie par un réservoir (PC)

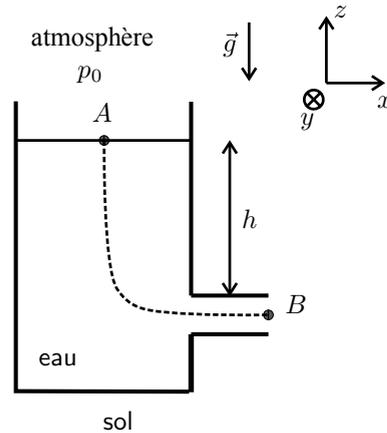
On considère un réservoir muni d'une vidange. On suppose que $S_B \ll S_A$. L'écoulement est homogène, parfait et incompressible.

1. Au bout d'une durée très courte un régime quasistationnaire est établi (voir exercice 11.3). Montrer que la vitesse de sortie vaut alors $v_B = \sqrt{2gh}$.
2. Exprimer la force que l'eau exerce sur le réservoir.
3. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement f pour que le réservoir ne glisse pas ?



1. Théorème de Bernoulli

L'écoulement est incompressible. On a donc conservation du débit volumique : $D_v = v_A S_A = v_B S_B$. Comme $S_B \ll S_A$, alors $v_A \ll v_B$.



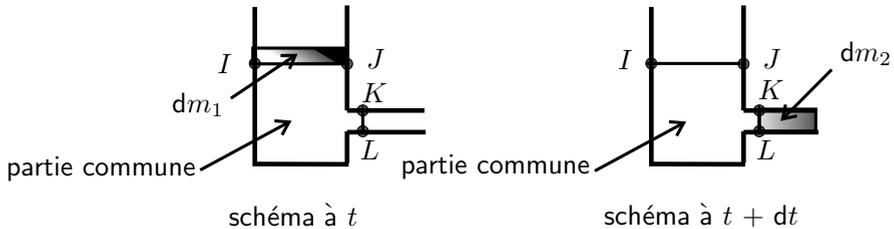
L'écoulement est homogène, parfait, quasistationnaire et incompressible (HPPI). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A \rightarrow B$:

$$\frac{p_A}{\mu} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_B}{\mu} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$$

L'entrée et la sortie sont en contact avec l'air. On a donc $p_A = p_B = p_0$. De plus $z_A - z_B = H$. La vitesse en A est négligeable devant la vitesse en B . On a donc :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

2. Définition du système fermé :



Le fluide compris entre IJ et KL est un système ouvert. On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .

Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à $t + dt$: $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$.

On a conservation du débit massique, donc $dm_1 = dm_2 = dm$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm \vec{v}_1$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm \vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = dm (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $-p_0 S_A \vec{u}_z$.
- Force de pression à la sortie : $-p_0 S_B \vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m \vec{g}$.
- Force que le réservoir exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force \vec{F}_1 que l'eau exerce sur le réservoir.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x + m \vec{g} - \vec{F}_1$$

On néglige la vitesse à l'entrée. On a donc :

$$\vec{F}_1 = m \vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

3. Le système mécanique étudié est le **réservoir**.



On ne considère pas l'eau à l'intérieur !



On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids du réservoir : $M\vec{g}$.
- Force \vec{F}_1 que l'eau exerce sur le réservoir. Cette force a été déterminée dans la question précédente.
- Réaction du support \vec{R} que l'on peut décomposer en une réaction tangentielle \vec{T} et une réaction normale \vec{N} .
- Force de pression atmosphérique \vec{F}_p

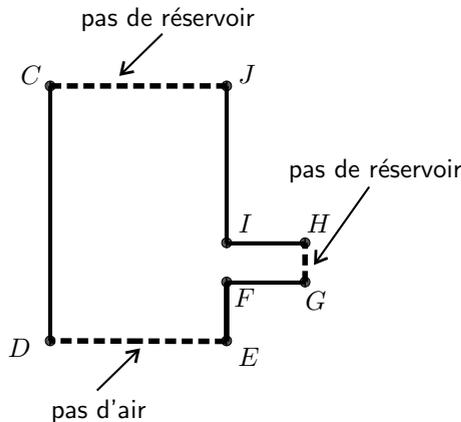
Méthode pour calculer les forces de pression sur le réservoir

On a souvent besoin en mécanique des fluides de calculer la résultante des forces de pression \vec{F}_p qui s'exercent sur une surface qui n'est pas fermée. On utilise souvent la méthode consistant à définir une surface fermée fictive.

On cherche à calculer \vec{F}_p la résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur le réservoir. Ces forces s'exercent sur la surface Σ_1 constitué des parties CD , EF , FG , HI et IJ (traits pleins sur la figure). Elles ne s'appliquent pas sur les parties DE (pas d'air), GH (pas de réservoir) et CJ (pas de réservoir).



On définit la surface Σ_2 constituée des parties DE , GH et CJ (traits en pointillés sur la figure).



On définit ainsi la surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ fictive et entourée d'air. Elle n'a pas de réalité physique mais la résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée fictive $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme. On pourra alors en déduire très facilement \vec{F}_p .



La surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est une surface fermée.

$$\oiint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

La résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme.

On peut décomposer cette somme en deux termes :

- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_1 : \vec{F}_p .
- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_2 : $p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.

On a donc : $\vec{0} = \vec{F}_p + p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.

Soit :

$$\vec{F}_p = p_0 S_B \vec{u}_x$$

Étude de l'équilibre du réservoir

On applique le théorème de la quantité de mouvement au réservoir à l'équilibre :

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_p$$

On a vu dans la question précédente que :

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

On projette \vec{T} et \vec{N} sur \vec{u}_x et \vec{u}_z . On a donc :

$$\vec{0} = M\vec{g} + m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x + T\vec{u}_x + N\vec{u}_z + p_0 S_B \vec{u}_x$$

On peut être surpris que le poids de l'eau n'apparaît pas dans l'équation précédente traduisant l'équilibre du réservoir mais il intervient bien dans la force \vec{F}_1 .

En projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z , on a :
$$\begin{cases} -D_m v_B + T = 0 \\ -mg - Mg - p_0 S_A + N = 0 \\ 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} T = D_m v_B \\ N = mg + Mg + p_0 S_A \\ 0 \end{cases}$$

La condition pour que le réservoir ne glisse pas est que :

$$|T| \leq f |N|$$

Soit :

$$D_m v_B \leq f(mg + Mg + p_0 S_A)$$

Exercice 22.4 : Fusée Ariane 5 (PC-PSI)

On étudie le décollage vertical de la fusée Ariane 5. La masse de la fusée et du satellite est notée m_f . A $t = 0$, la masse de gaz est notée m_{g0} . Les gaz sont éjectés avec une vitesse verticale par rapport au référentiel terrestre galiléen à la vitesse relative \vec{u} par rapport à la fusée. On note D_m le débit massique supposé constant. On néglige les frottements de l'atmosphère et le champ de pesanteur g est supposé uniforme.

$$D_m = 3,6 \times 10^3 \text{ kg.s}^{-1} ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2} ; m_0 = m_f + m_{g0} = 460 \times 10^3 \text{ kg} ; u = 2,1 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

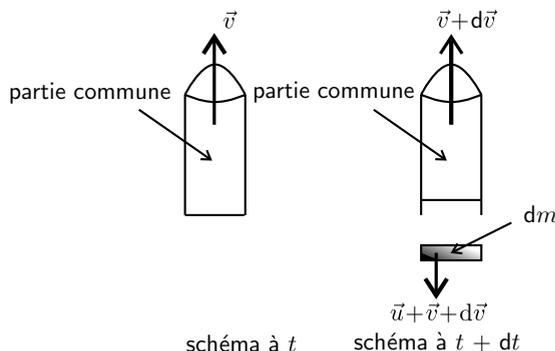
1. Déterminer la force, due à l'éjection des gaz, subie par la fusée.
2. Quelle doit être la valeur minimale de cette force pour que la fusée décolle ? Calculer l'accélération de la fusée à $t = 0$.
3. Calculer la vitesse de la fusée au bout de 15 s.

Analyse du problème

Le système {fusée + carburant} est un système ouvert. Il faut donc se ramener à un système fermé pour appliquer le théorème de la quantité de mouvement. L'énoncé donne la vitesse relative des gaz, c'est-à-dire la vitesse des gaz par rapport à la fusée. On a un système ouvert en régime non permanent avec une sortie. On va adapter la même méthode vue précédemment en définissant rigoureusement le système fermé Σ à t et à $t + dt$.



1. Définition du système fermé :



Le référentiel absolu est le référentiel terrestre supposé galiléen. On appelle \vec{v} le vecteur vitesse de la fusée t , $d\vec{v}$ la variation du vecteur vitesse de la fusée pendant dt . Le vecteur vitesse de la fusée à $t + dt$ est donc $\vec{v} + d\vec{v}$. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : fusée de vitesse \vec{v} de masse $m_f + m_g(t)$.
- Système fermé Σ à $t + dt$: fusée de vitesse $(\vec{v} + d\vec{v})$ de masse $(m_f + m_g(t) - D_m dt) +$ gaz éjecté de masse dm . En effet, pendant dt une masse $dm = D_m dt$ de gaz a été éjectée. Cette masse de gaz éjectée a une vitesse relative \vec{u} par rapport à la fusée. On applique la loi de composition des vitesses à dm pour calculer la vitesse absolue de la masse de gaz éjectée : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Le référentiel relatif lié à la fusée est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre, donc la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de la fusée, soit $\vec{v}_e = \vec{v} + d\vec{v}$. La vitesse absolue de la masse dm est donc : $\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = (m_f + m_g(t)) \vec{v}$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = (m_f + m_g(t) - D_m dt) (\vec{v} + d\vec{v}) + D_m dt (\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v})$$

En simplifiant, on a :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = (m_f + m_g(t)) d\vec{v} + D_m dt \vec{u}$$

On obtient :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}$$

Bilan des actions mécaniques extérieures :

Forces de gravitation : $(m_f + m_g(t)) \vec{g}$.

Le théorème de la quantité de la mouvement s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = (m_f + m_g(t)) \vec{g}$$

Soit :

$$(m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} = (m_f + m_g(t)) \vec{g} - D_m \vec{u}$$

La force due à l'éjection des gaz subie par la fusée que l'on appelle force de poussée est donc égale à :

$$-D_m \vec{u}$$

Tout se passe comme si on appliquait le théorème de la quantité de mouvement au système fermé de masse $m_f + m_g(t)$ soumis aux forces de pesanteur $(m_f + m_g(t)) \vec{g}$ et à la force que les gaz éjectés exercent sur la fusée.

Interprétation qualitative avec un ballon qui se dégonfle

On considère un ballon immobile qui se dégonfle à $t = 0$.

- 1^{ère} interprétation : La quantité de mouvement du ballon est donc nulle. Le ballon se déplace vers la gauche par exemple alors que la masse d'air se déplace vers la droite. Comme on a conservation de la quantité de mouvement, la somme des deux quantités de mouvement est donc nulle à tout instant t .
- Le système étudié est le ballon + la masse air qu'il contient à t sauf la masse dm qui va sortir pendant dt . Ce système va exercer une force sur cette masse dm pour la faire sortir (force exercée vers la droite). D'après le principe des actions réciproques, la masse dm va exercer sur le ballon une force vers la gauche. Cette force est appelée force de poussée.

2. La condition de décollage est qu'à $t = 0$, on doit avoir :

$$\frac{dv}{dt} > 0$$

On projette sur l'axe Oz : $\vec{v} = v\vec{u}_z$, $\vec{u} = -u\vec{u}_z$ et $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On doit donc avoir à $t = 0$:

$$D_m u > (m_f + m_{g0}) g$$

Soit $D_m u > 4,508 \times 10^6 \text{ N}$.

L'accélération vaut : $a = 6,63 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

3. On suppose qu'il reste des gaz dans la fusée. L'équation différentielle du mouvement en projection sur Oz est :

$$(m_f + m_{g0} - D_m t) \frac{dv}{dt} = -(m_f + m_{g0} - D_m t) g + D_m u$$

On sépare les variables :

$$dv = \frac{D_m u - (m_f + m_{g0} - D_m t) g}{(m_f + m_{g0} - D_m t)} dt$$

En simplifiant, on a :

$$dv = \frac{D_m u}{(m_f + m_{g0} - D_m t)} dt - g dt$$

L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$v = \frac{D_m u}{-D_m} \ln \frac{m_f + m_{g0} - D_m t}{m_f + m_{g0}} - g t$$

On pose $m_0 = m_f + m_{g0}$. On a donc :

$$v = -u \ln \frac{m_0 - D_m t}{m_0} - g t$$

L'application numérique donne :

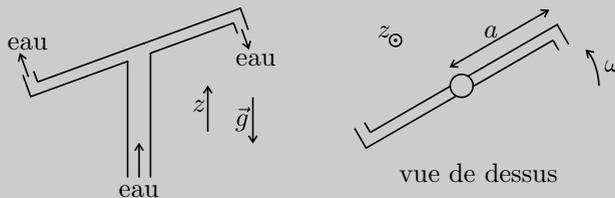
$$v = 115 \text{ m.s}^{-1} = 415 \text{ km.h}^{-1}$$

Exercice 22.5 : Tourniquet hydraulique (PC-PSI)

On considère un tourniquet utilisé pour l'arrosage des pelouses, en rotation autour d'un axe vertical. De l'eau arrive dans le tube vertical avec un débit massique D_m constant. L'eau est éjectée par deux orifices faisant un angle de $\frac{\pi}{2}$ par rapport aux deux tubes horizontaux et à la vitesse relative u par rapport au tube. Les deux sorties d'eau sont dans un plan horizontal.

On appelle J le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du tourniquet et de l'eau contenue dans celui-ci. Les frottements au niveau de l'articulation sont modélisés par un couple de moment $-k\omega$.

Déterminer la vitesse angulaire du tourniquet ω en fonction du temps sachant qu'il est immobile à $t = 0$.

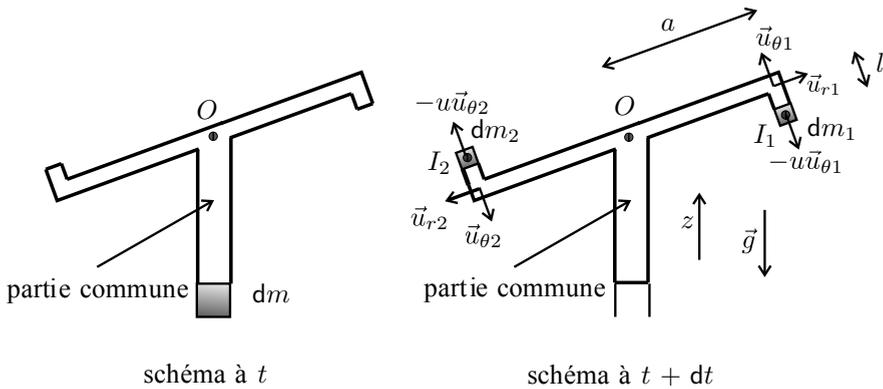


Analyse du problème

Le système {tourniquet + eau} est un système ouvert. Il faut donc se ramener à un système fermé pour appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Δ orienté suivant $+\vec{u}_z$. L'énoncé donne la vitesse relative de l'eau qui sort par rapport au tube. Il faut donc appliquer la loi de composition des vitesses.



Définition du système fermé :



Le référentiel absolu est le référentiel terrestre supposé galiléen. Le référentiel lié au tourniquet est en rotation autour de l'axe Oz . Pour un point matériel, la loi de composition des vitesses s'écrit : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$. La vitesse d'entraînement au point I_1 à l'instant $t + dt$ vaut : $a\omega(t + dt)\vec{u}_{\theta 1}$ car le point coïncidant avec I_1 a un mouvement circulaire de centre O et de vitesse angulaire $\omega(t + dt)$.

On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : PC (partie commune représenté en traits gras sur le schéma : tube vertical + deux tubes horizontaux + eau contenue dans les tubes) + masse dm qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: PC (partie commune) + masse dm_1 qui sort pendant dt + masse dm_2 qui sort pendant dt .

On a conservation de la masse, donc $dm = dm_1 + dm_2$, soit en divisant par dt :

$$D_m = D_{m_1} + D_{m_2}$$

Bilan de moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

On note $\omega(t)$ la vitesse angulaire l'instant t et $\omega(t + dt) = \omega(t) + d\omega$ la vitesse angulaire à $t + dt$.

A l'instant t : $\sigma_{\Delta}(t) = J\omega(t)$. La masse dm qui rentre pendant dt n'est pas encore dans le tube en rotation. Son moment cinétique est nul.

A l'instant $t + dt$:

$$\sigma_{\Delta}(t + dt) = J\omega(t + dt) + \sigma_{\Delta}(\text{masse } dm_1) + \sigma_{\Delta}(\text{masse } dm_2).$$

On a besoin de calculer le moment cinétique des masses dm_1 et dm_2 :

- $\vec{\sigma}_O(dm_1) = \vec{OI}_1 \wedge dm_1 \vec{v}_1$. La vitesse relative de la masse dm_1 est $-u\vec{u}_{\theta 1}$. On a vu que la vitesse d'entraînement est $a\omega(t + dt)\vec{u}_{\theta 1}$. La vitesse absolue est donc : $-u\vec{u}_{\theta 1} + a\omega(t + dt)\vec{u}_{\theta 1}$. On a donc : $\vec{\sigma}_O(dm_1) = (a\vec{u}_{r1} - l\vec{u}_{\theta 1}) \wedge dm_1 (-u\vec{u}_{\theta 1} + a\omega(t + dt)\vec{u}_{\theta 1})$. Soit :

$$\vec{\sigma}_O(dm_1) = D_{m_1}dt a (-u + a\omega + ad\omega)\vec{u}_z$$

- De même pour la masse dm_2 , on a :

$$\vec{\sigma}_O (dm_2) = (a\vec{u}_{r2} - l\vec{u}_{\theta2}) \wedge D_{m2}dt (-u\vec{u}_{\theta2} + a\omega(t + dt)\vec{u}_{\theta2}), \text{ soit :}$$

$$\vec{\sigma}_O (dm_2) = D_{m2}dt a (-u + a\omega + ad\omega) \vec{u}_z$$

On néglige les termes $dt d\omega$ qui sont des termes du deuxième ordre.

On a vu que $D_m = D_{m1} + D_{m2}$, d'où en divisant par dt :

$$\frac{\sigma_{\Delta}(t + dt) - \sigma_{\Delta}(t)}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} + D_m a (-u + a\omega)$$

Bilan des moments par rapport à l'axe Δ des forces extérieures :

- Le moment par rapport à Δ des forces de pesanteur est nul car les forces de pesanteur sont équivalentes à une force unique appliquée en G centre de gravité du système à t . Comme G est sur l'axe Oz , alors la longueur du bras de levier est nulle et le moment par rapport Δ est donc nul.
- Frottements au niveau de l'articulation modélisés par un moment égal à $-k\omega$.
- Le moment des forces de pression atmosphérique est nul car ces forces et les moments se compensent deux par deux.

Théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Δ :

Pour le système Σ , on a donc :

$$\frac{\sigma_{\Delta}(t + dt) - \sigma_{\Delta}(t)}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} + D_m a (-u + a\omega) = -k\omega$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{D_m a^2 + k}{J} \omega = \frac{D_m a u}{J}$$

La constante de temps vaut :

$$\tau = \frac{J}{D_m a^2 + k}$$

La pulsation limite en régime permanent est :

$$\omega_{\text{lim}} = \frac{D_m a u}{D_m a^2 + k}$$

La solution de l'équation différentielle du premier ordre est :

$$\omega = \omega_{\text{lim}} + A \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

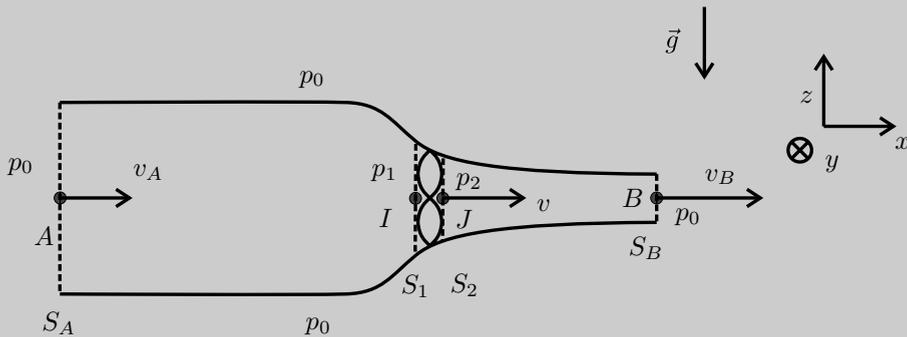
Comme à $t = 0$ $\omega = 0$, on a donc $A = -\omega_{\text{lim}}$. D'où :

$$\omega = \omega_{\text{lim}} \left(1 - \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) \right)$$

Exercice 22.6 : Fonctionnement d'une hélice (PC-PSI)

On considère un écoulement homogène, parfait et incompressible. L'hélice est animée d'un mouvement de rotation autour de son axe fixe, à vitesse angulaire constante. On néglige son épaisseur ce qui revient à supposer que $S_1 = S_2$. On néglige les effets de la pesanteur. Le mouvement du fluide autour de l'hélice est supposé stationnaire dans le référentiel terrestre galiléen et à symétrie de révolution autour de $x'x$. On considère un tube de courant représenté sur la figure ci-dessous qui englobe l'hélice. La pression p_0 est supposée uniforme autour du tube de courant. On appelle D_m le débit massique.

1. Exprimer $p_2 - p_1$ en fonction de v_A, v_B et μ .
2. Exprimer la force exercée par l'hélice sur le fluide de deux façons et en déduire la vitesse v du fluide au niveau de l'hélice en fonction de v_A et v_B .
3. Déterminer la puissance de la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de D_m, v_A et v_B par deux méthodes.



Analyse du problème

L'écoulement est HPPI. On pourra donc appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant. Attention, on ne peut pas l'appliquer directement entre A et B car la ligne de courant n'est pas définie au niveau de l'hélice. Il faut donc l'appliquer entre A et I puis entre J et B.

Le fluide compris entre I et J est un système ouvert. Il faut se ramener à un système fermé pour pouvoir appliquer le bilan de quantité de mouvement, le premier principe de la thermodynamique et le théorème de l'énergie cinétique.



1. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique. On note v_1 la vitesse au point I et v_2 la vitesse au point J . On a donc : $D_V = v_1 S_2 = v_2 S_2$. Comme $S_1 = S_2$ alors $v_1 = v_2$ que l'on notera v par la suite.

L'écoulement est HPPI (homogène, parfait, permanent et incompressible).

Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A \rightarrow I$ s'écrit :

$$\frac{p_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{p_1}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz_I$$

Comme $z_A = z_I$ et $p_A = p_0$, on a donc :

$$\frac{p_0}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_1}{\mu} + \frac{v^2}{2} \text{ (eq.1)}$$

Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $J \rightarrow B$ s'écrit de même :

$$\frac{p_0}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{p_2}{\mu} + \frac{v^2}{2} \text{ (eq.2)}$$

En faisant la différence des équations 1 et 2, on a :

$$\frac{p_2 - p_1}{\mu} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

Remarque : Si l'hélice est plongée dans un liquide de masse volumique élevée, alors la pression p_1 peut devenir faible et inférieure à la pression de vapeur saturante. Des poches de vapeur peuvent se former contre l'hélice. C'est le phénomène de cavitation et l'implosion de ces poches de vapeur conduit à la détérioration de l'hélice.

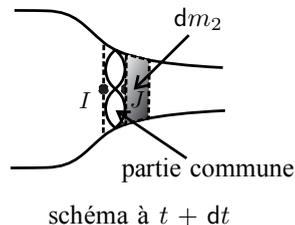
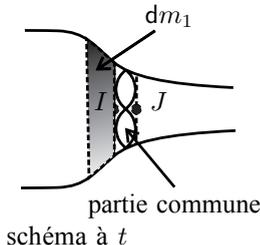


2. a. Première méthode : système ouvert compris entre I et J

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre I et J est un système ouvert. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_2 qui sort pendant dt .



Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_1$$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm_2 \vec{v}_2$$

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a conservation du débit massique, donc :

$$dm_1 = dm_2 = D_m dt$$

Comme $v_1 = v_2$ on en déduit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{0}$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide.
- Forces de pression extérieures : forces de pression s'exerçant sur surface S_1 : $p_1 S_1 \vec{u}_x$ + forces de pression s'exerçant sur la surface S_2 : $-p_2 S_2 \vec{u}_x$ + forces de pression s'exerçant sur la surface latérale : $\iint -p_0 \vec{dS}_{ext} = \vec{0}$ par symétrie puisque les forces s'annulent pas deux.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_1 + p_1 S_1 \vec{u}_x - p_2 S_2 \vec{u}_x$$

En utilisant le résultat de la question 1, on en déduit que :

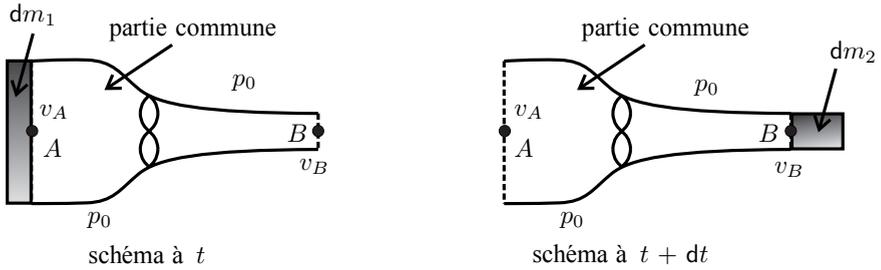
$$\vec{F}_1 = (p_2 - p_1) S \vec{u}_x = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2} S \vec{u}_x$$

b. Deuxième méthode : système ouvert compris entre A et B

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre A et B est un système ouvert. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et B + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et B + masse dm_2 qui sort pendant dt .



Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_A$$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm_2 \vec{v}_B$$

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a conservation du débit massique, donc :

$$dm_1 = dm_2 = D_m dt$$

On en déduit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide.
- Forces de pression extérieures : $\oiint -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$

car la surface est fermée et la pression est uniforme.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{F}_1$$

c. On a deux expressions de la force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide :

$$\vec{F}_1 = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2} S \vec{u}_x$$

On a donc : $\mu S v (v_B - v_A) = \frac{\mu S (v_B - v_A) (v_B + v_A)}{2}$.

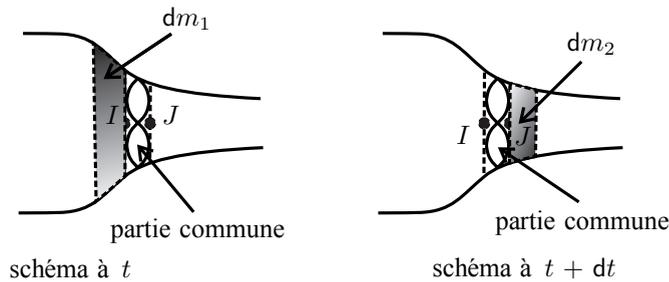
En simplifiant, on a donc :

$$v = \frac{v_A + v_B}{2}$$

3. a. Première méthode : Premier principe de la thermodynamique

On considère le système ouvert compris entre I et J . On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_2 qui sort pendant dt .



On a vu dans l'exercice 22.1 l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent avec une entrée et une sortie :

$$dm (h_2 - h_1) = \delta W_i + \delta Q$$

L'écoulement est parfait. La transformation est donc adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique. On a donc $\delta Q = 0$.

W_i est le travail indiqué (travail reçu des parties mobiles de la machine). On a $W_i = P dt$.

En divisant par dt , on a :

$$P = D_m (h_2 - h_1)$$

Pour calculer $h_2 - h_1$, on utilise l'identité thermodynamique : $dH = T dS + V dp$. On divise par la masse pour passer en grandeurs massiques. Le volume massique est l'inverse de la masse volumique. On a donc :

$$dh = T ds + \frac{1}{\mu} dp$$

$ds = 0$ car la transformation est isentropique. On intègre entre l'état 1 et l'état 2, soit : $h_2 - h_1 = \frac{1}{\mu} (p_2 - p_1)$.

On a donc :

$$P = D_m \frac{p_2 - p_1}{\mu} = \frac{\mu S v}{\mu} (p_2 - p_1)$$

On a vu dans la question 1 que $p_2 - p_1 = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2}$.

On en déduit la puissance de la force exercée par l'hélice sur le fluide :

$$P = \frac{1}{2} D_m (v_B^2 - v_A^2)$$

Interprétation physique

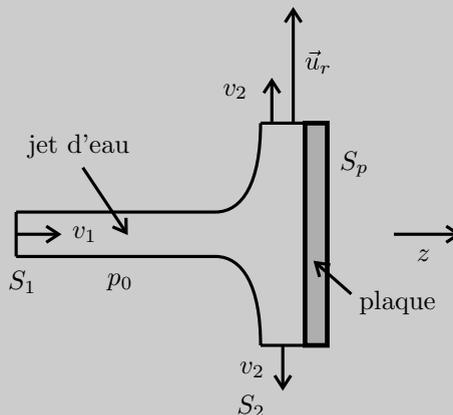
Si $S_B < S_A$ alors $v_B > v_A$. L'hélice fournit de la puissance au fluide ($P > 0$). C'est le cas étudié dans cet exercice.

Si $S_B > S_A$ alors $v_B < v_A$. L'hélice absorbe de la puissance du fluide ($P < 0$).

Exercice 22.7 : Force exercée sur une plaque (PC-PSI)

On considère un jet d'eau qui frappe une plaque immobile dans le référentiel terrestre galiléen. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent et incompressible. On appelle p_0 la pression atmosphérique et on néglige les effets de la pesanteur. La vitesse de l'eau dans le jet est $v_1 = v_1 \vec{u}_z$ et la vitesse de l'eau en un point de la surface de sortie est $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_r$ en notant \vec{u}_r le vecteur radial des coordonnées cylindriques. On représente sur la figure ci-dessous un tube de courant. On note S_1 la surface de la section droite du jet incident, S_2 la surface de la section droite de sortie du jet et S_p la surface de la plaque.

Calculer la force subie par la plaque de la part de l'eau et de l'air en considérant deux systèmes différents.



Analyse du problème

On va appliquer le théorème de la quantité de mouvement à deux systèmes différents. Le premier système contiendra uniquement le fluide alors que le deuxième système contiendra les obstacles. On verra que les calculs sont souvent plus simples quand on englobe les obstacles.



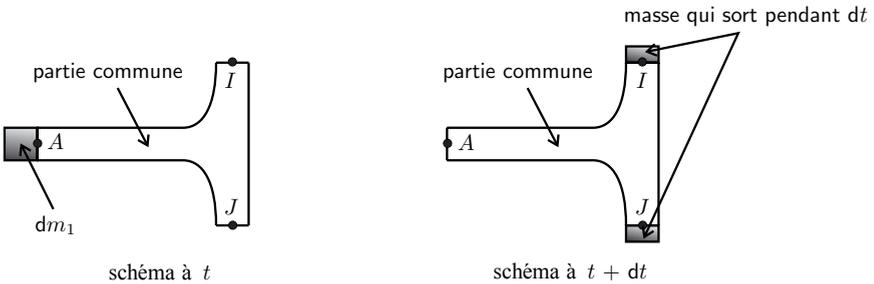
Attention : on a une invariance par rotation autour de l'axe Oz . La figure représente uniquement une projection pour un angle θ donné.



a. Première méthode : système ouvert compris entre A et IJ

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre A et IJ est un système ouvert.



On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse qui sort pendant dt . Attention, cette masse est répartie sur une couronne d'axe Oz et en chaque point la vitesse est $v_2 \vec{u}_r$.

Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est :
 $\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_1$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est :
 $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + \vec{0}$. En effet, la somme des quantités de mouvement des petites masses qui sortent pendant dt est nulle car elles s'annulent deux par deux.

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a $dm_1 = D_m dt$.

On en déduit que :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par la plaque sur l'eau.
- Forces de pression extérieures : \vec{F}_p .



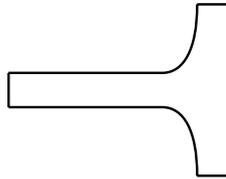
Le calcul des forces de pression extérieure est délicat. On utilise souvent la méthode suivante : on se ramène à un système fermé soumis à des forces de pression uniforme.



Méthode pour calculer les forces de pression extérieure sur le fluide

On cherche à calculer la résultante des forces de pression extérieure qui s'exercent sur le fluide. Ces forces s'exercent sur la surface Σ_1 représentée en traits pleins sur la figure.

On définit la surface Σ_2 représentée en traits pointillés sur la figure.



La surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est une surface fermée.

$$\oiint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

La résultante des forces de pression sur cette surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme.

On peut décomposer cette somme en deux termes :

- résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ_1 : \vec{F}_p .
- résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ_2 : $-p_0 S_p \vec{u}_z$.

On a donc : $\vec{0} = \vec{F}_p - p_0 S_p \vec{u}_z$.

Soit :

$$\vec{F}_p = -p_0 S_p \vec{u}_z$$

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1 = p_0 S_p \vec{u}_z + \vec{F}_1$$

La force que la plaque exerce sur l'eau est donc :

$$\vec{F}_1 = -D_m \vec{v}_1 - p_0 S_p \vec{u}_z$$

D'après le principe des actions réciproques, la force que l'eau exerce sur la plaque est : $-\vec{F}_1 = D_m \vec{v}_1 + p_0 S_p \vec{u}_z$.

La force que l'air ambiant exerce sur la plaque est $-p_0 S_p \vec{u}_z$.

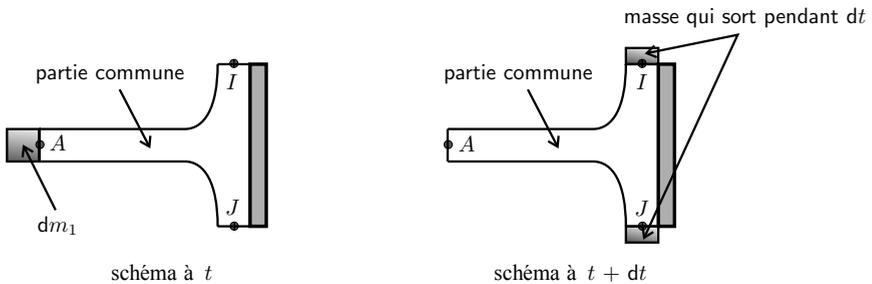
On en déduit donc la force subie par la plaque de l'eau et de l'air ambiant est

$$\vec{F}_2 = D_m \vec{v}_1$$

b. Deuxième méthode : système ouvert compris entre A et IJ en englobant la plaque

On reprend quasiment le même système que précédemment mais on englobe la plaque. On va voir que les calculs vont être beaucoup plus simples.

Définition du système fermé :



On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse dm_1 qui rentre pendant dt + plaque.
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse qui sort pendant dt .

On a le même bilan de quantité de mouvement puisque la plaque est immobile :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1$$

Bilan des actions mécanique extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_{op} exercée par un opérateur pour maintenir la plaque en équilibre.

- Forces de pression extérieures. La résultante des forces de pression extérieures est nulle car la pression est uniforme et s'applique sur une surface fermée :

$$\oiint -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

On a donc :

$$-D_m \vec{v}_1 = \vec{0} + \vec{F}_{op} + \vec{0}$$

Il reste à appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la plaque immobile dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à \vec{F}_{op} (force exercée par un opérateur pour la maintenir en équilibre) et à \vec{F}_2 (force exercée par l'eau et l'air ambiant). On a donc $\vec{F}_{op} + \vec{F}_2 = \vec{0}$, soit :

$$\vec{F}_2 = D_m \vec{v}_1$$

On retrouve bien le résultat établi avec la première méthode.



On retient qu'il est souvent plus simple d'englober les obstacles pour calculer la force qui s'exerce sur un obstacle.

Partie 10

Acoustique

Plan

23. Acoustique	425
23.1 : Tuyau d'orgue (PC-PSI)	425
23.2 : Coefficients de réflexion et transmission (PC-PSI)	430
23.3 : Transmission à travers à une membrane* (PC-PSI)	435

Acoustique

Exercice 23.1 : Tuyau d'orgue (PC-PSI)

On considère un tuyau d'orgue rempli d'air de masse volumique μ_0 . On note p_1 la surpression acoustique et u_1 la vitesse particulière. La célérité du son est notée c . L'extrémité est fermée en $x = 0$ et ouverte en $x = L$. On cherche $p_1(x, t)$ sous la forme d'ondes stationnaires : $p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \phi)$.

1. Déterminer la vitesse particulière en fonction de p_0 , μ_0 , c , ω , k , x et ϕ .
2. Déterminer la fréquence ν_0 du fondamental et les fréquences des harmoniques ν_n avec n entier. Déterminer la position des noeuds et des ventres de surpression acoustique pour ν_0 et ν_1 .
3. L'amplitude maximale du déplacement des particules est $\xi_{\max} = 0,4$ mm. En déduire l'amplitude maximale p_0 de la surpression acoustique pour la fréquence ν_0 .

Application numérique : $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$; $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$; $L = 60 \text{ cm}$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique. On ne peut pas utiliser l'impédance acoustique car l'onde est stationnaire. L'équation d'Euler permet d'en déduire la vitesse particulière. Il faut faire attention aux conditions aux limites.

Cours : Approximation acoustique

On considère une onde sonore qui se propage dans un fluide. Au repos, le fluide a une masse volumique μ_0 , une pression P_0 et une vitesse particulière nulle.

Lorsque l'onde sonore se propage, les grandeurs précédentes sont modifiées en chaque point du milieu :

- La pression P peut se mettre sous la forme $P = P_0 + p_1$. On appelle p_1 la pression acoustique ou surpression avec $|p_1| \ll P_0$.
- La masse volumique peut se mettre sous la forme : $\mu = \mu_0 + \mu_1$ avec $|\mu_1| \ll \mu_0$.
- La vitesse particulière peut se mettre sous la forme : $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}_1$.

p_1 , μ_1 et u_1 seront considérés comme des infiniment petits du premier ordre.

Équations utiles dans les exercices d'acoustique

On utilisera trois équations qui découlent directement du cours de mécanique des fluides et de thermodynamique en se plaçant dans le cadre de l'approximation acoustique.

Première équation : équation d'Euler. On néglige le terme d'accélération convective qui est du deuxième ordre. On a alors :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1$$

Deuxième équation : équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{u}_1) = 0$$

Troisième équation : coefficient de compressibilité du fluide.

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}$$

En combinant la deuxième et la troisième équation, on a :

$$\frac{\partial (\mu_0 \chi_0 p_1)}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{u}_1) = 0$$

On dérive par rapport au temps et on commute les dérivées partielles :

$$\mu_0 \chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = 0 \text{ (eq.1)}$$

La divergence de la première équation s'écrit :

$$\text{div} \left(\mu_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = -\text{div}(\vec{\text{grad}} p_1) = -\Delta p_1$$

Soit :

$$\mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = -\Delta p_1 \text{ (eq.2)}$$

On en déduit de (1) et (2) l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 = \mu_0 \chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

On a la même équation de d'Alembert pour u_1 .

La célérité du son dans le milieu est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

Méthode pour obtenir la relation de dispersion :

On injecte $p_1(x, t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

On a : $-k^2 p_1 = -\frac{1}{c^2} \omega^2 p_1$, d'où

$$\omega = kc$$



1. La surpression est $p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \phi)$.

L'équation d'Euler en projection sur l'axe Ox s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = p_0 k \cos(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

On obtient :

$$u_1 = \frac{p_0 k}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

La constante d'intégration est nulle dans tout le cours sur la propagation des ondes.

2. Conditions aux limites.

L'extrémité $x = 0$ est fermée : la vitesse particulière est nulle. On doit donc avoir $u_1 = 0$ pour $x = 0$, soit $\sin \phi = 0$. On choisit alors : $\phi = 0$.

L'extrémité $x = L$ est ouverte : la surpression est nulle. On doit donc avoir $p_1 = 0$ pour $x = L$, soit $\cos(kL) = 0$. Ce qui implique :

$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

avec n entier positif ou nul.

On a vu que $\omega = kc$. On a alors :

$$kL = \frac{2\pi\nu}{c}L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pour chaque valeur de n , on a une fréquence ν , d'où :

$$\nu_n = \frac{c}{4L} + \frac{c}{2L}n$$

La fréquence ν_0 (obtenue avec $n = 0$) est appelée le fondamental :

$$\nu_0 = \frac{c}{4L}$$

Les autres fréquences sont les harmoniques impairs :

$$\nu_n = \nu_0(1 + 2n)$$

On peut définir une longueur d'onde λ_n définie par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

Comme $kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$, alors

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{1}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)$$

On en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda_n = \frac{4L}{1 + 2n}$$

a) Étude du fondamental de fréquence ν_0 **Noeuds de vibration de surpression acoustique :**

On cherche à déterminer la position des noeuds de vibration de surpression acoustique, c'est-à-dire les points pour lesquels :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right) = 0$$

On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_m = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier relatif.

Pour chaque valeur de m , on a une abscisse :

$$x_m = \frac{\lambda_0}{4} + m\frac{\lambda_0}{2}$$

Ventres de vibration de surpression acoustique :

La position des ventres de vibration de surpression acoustique s'obtient lorsque :

$$\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right)\right| = 1$$

On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_q = q\pi$$

avec q entier relatif.

Pour chaque valeur de q , on a une abscisse :

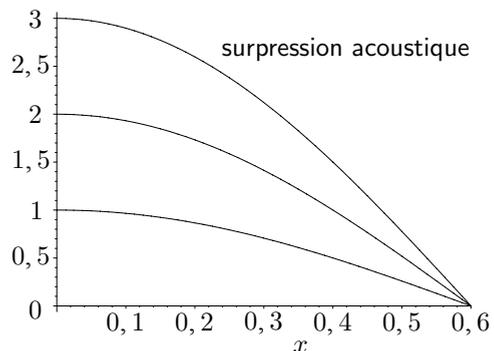
$$x_q = q\frac{\lambda_0}{2}$$

Remarque : On retrouve le résultat connu : la distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda_0}{2}$. La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda_0}{2}$. La distance entre un noeud et un ventre est $\frac{\lambda_0}{4}$.



On représente sur la figure ci-contre les ondes de pression pour différentes valeurs de p_0 à un instant t .

On vérifie que l'on a bien un ventre de surpression en $x = 0$ et un noeud de surpression en $x = L$.



b) Étude de l'harmonique de fréquence $\nu_1 = 3\nu_0$

La longueur d'onde λ_1 est :

$$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$$

Noeuds de vibration de surpression acoustique :

Les noeuds de vibration sont pour :

$$x_m = \frac{\lambda_1}{4} + m \frac{\lambda_1}{2}$$

avec m entier relatif. On a alors :

$$x_m = \frac{L}{3} + m \frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = \frac{L}{3}$ et $x = L$.

Ventres de vibration de surpression acoustique :

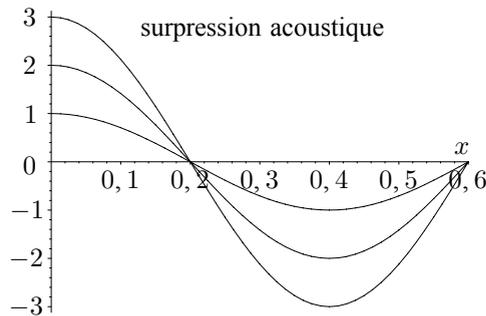
Les ventres de vibration sont pour :

$$x_q = q \frac{\lambda_1}{2}$$

avec q entier relatif. On a alors :

$$x_q = q \frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = 0$ et $x = \frac{2L}{3}$



Remarque : On vérifie que la distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda_1}{2}$ et que

la distance entre un noeud et un ventre est $\frac{\lambda_1}{4}$.



3. La vitesse particulière est la dérivée du déplacement ξ par rapport au temps. On a donc :

$$u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

On intègre :

$$\xi = -\frac{p_0}{\mu_0 c \omega} \cos(\omega t) \sin(kx)$$

On a toujours la constante d'intégration nulle dans le cours sur la propagation des ondes.

L'amplitude maximale du déplacement des particules est :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{\mu_0 c \omega} = \frac{p_0}{\mu_0 k c^2}$$

Comme $\lambda_0 = 4L$, on en déduit :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} \lambda_0 = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} 4L = p_0 \frac{2L}{\pi\mu_0 c^2}$$

Finalement la surpression maximale est :

$$p_0 = \frac{\xi_{\max} \pi \mu_0 c^2}{2L} = 157 \text{ Pa}$$

Exercice 23.2 : Coefficients de réflexion et de transmission (PC-PSI)

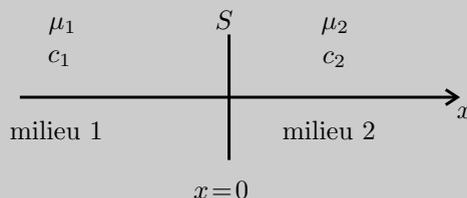
On considère une onde plane progressive monochromatique acoustique se propageant dans le sens des $x > 0$ dans le milieu 1. La vitesse particulière est notée $\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$. Elle arrive à l'interface entre deux milieux de surface S à l'abscisse $x = 0$.

On note $\mu_1, c_1, \mu_2, c_2, Z_{a1}$ et Z_{a2} les masses volumiques, célérités du son et impédances acoustiques dans les milieux 1 et 2.

On pose $Z_{a1} = \mu_1 c_1, Z_{a2} = \mu_2 c_2$ et $\alpha = \frac{Z_{a2}}{Z_{a1}}$.

1. Montrer qu'il existe une onde réfléchie et exprimer \underline{u}_r et \underline{u}_t en fonction de r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse. En déduire $\underline{p}_i, \underline{p}_r$ et \underline{p}_t puis r et t en fonction de α .

2. Définir le vecteur de Poynting sonore et l'expression de la puissance sonore à travers la surface S . Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance moyenne en fonction de α . Calculer $R + T$ et interpréter physiquement. Que se passe-t-il si $Z_{a2} \gg Z_{a1}$?



Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique avec deux milieux de propagation. On peut utiliser l'impédance acoustique car on a une onde plane progressive. Attention au signe de l'impédance acoustique pour l'onde réfléchie.

Il faut savoir écrire les conditions aux limites en $x = 0$.

Cours : Impédance acoustique

Onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens $x > 0$:

On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des $x > 0$ dans le milieu 1, notée OPPM \oplus . La vitesse particulière est :

$$\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)).$$

L'équation d'Euler s'écrit dans le cadre de l'approximation acoustique en notation complexe :

$$\mu_1 \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_i}{\partial x}$$

On a donc :

$$\mu_1 i \omega u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) = -\frac{\partial p_i}{\partial x}$$

L'intégration donne avec la constante d'intégration nulle :

$$p_i = \frac{\mu_1 \omega u_{i0}}{k_1} \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

On a la relation $\omega = k_1 c_1$.

On définit l'impédance acoustique dans le milieu 1 de l'onde OPPM \oplus :

$$Z_{a1} = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_1 c_1$$

Onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens $x < 0$:

Pour l'onde réfléchie dans le milieu 1, notée OPPM \ominus , la vitesse particulière est :

$$\underline{u}_r = u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x)).$$

L'équation d'Euler s'écrit dans le cadre de l'approximation acoustique en notation complexe :

$$\mu_1 \frac{\partial \underline{u}_r}{\partial t} = -\frac{\partial p_r}{\partial x}$$

On a donc :

$$\mu_1 i \omega u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) = -\frac{\partial p_r}{\partial x}$$

L'intégration donne avec la constante d'intégration nulle :

$$p_r = -\frac{\mu_1 \omega u_{r0}}{k_1} \exp(i(\omega t + k_1 x))$$

On a la relation $\omega = k_1 c_1$.

L'impédance acoustique dans le milieu 1 de l'onde OPPM \odot est :

$$\frac{Pr_0}{u_{r0}} = -Z_{a1} = -\mu_1 c_1$$

Remarque : On définit l'impédance acoustique pour une onde plane progressive même si elle n'est pas monochromatique (ou harmonique). On a les mêmes résultats que ceux établis précédemment.

Conditions aux limites

À l'interface entre les deux milieux 1 et 2, on a deux conditions aux limites :

- **Continuité de la vitesse particulière :** on n'a pas de « décollement » à l'interface entre les deux milieux, donc $\underline{u}_1(0,t) = \underline{u}_2(0,t)$.
- **Continuité de la pression :** Si on applique le théorème de la quantité de mouvement à un élément de fluide de volume infiniment petit, on peut montrer que la somme des forces de pression vaut 0. On a alors continuité de la pression : $\underline{p}_1(0,t) = \underline{p}_2(0,t)$.

Comment calculer $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{p}_1, \underline{p}_2$?

On note avec un indice i l'onde incidente, r l'onde réfléchie et t l'onde transmise. Les équations étant linéaires, on peut appliquer le **théorème de superposition** :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_i + \underline{u}_r ; \underline{u}_2 = \underline{u}_t ; \underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r ; \underline{p}_2 = \underline{p}_t$$

 Il ne faut pas écrire $\underline{u}_i - \underline{u}_r$ pour calculer \underline{u}_1 !!!



1. Onde incidente :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$.

L'impédance acoustique est : $Z_{a1} = \frac{P_{i0}}{u_{i0}} = \mu_1 c_1$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

avec $\omega = k_1 c_1$.

Onde transmise :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_t = u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$.

L'impédance acoustique est : $Z_{a2} = \frac{P_{t0}}{u_{t0}} = \mu_2 c_2$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_t = \mu_2 c_2 u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$$

avec $\omega = k_2 c_2$.

On suppose qu'il n'existe pas d'onde réfléchie. Les relations de continuité de la vitesse particulière et de la pression s'écrivent en $x = 0$:

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0,t) = \underline{u}_t(0,t) \\ \mu_1 c_1 \underline{u}_i(0,t) = \mu_2 c_2 \underline{u}_t(0,t) \end{cases}$$

On devrait donc avoir : $Z_{a1} = Z_{a2}$ ce qui est impossible puisque les deux milieux sont différents. Il existe donc une onde réfléchie.

Onde réfléchie :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_r = u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$.

L'impédance acoustique est : $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_{a1} = -\mu_1 c_1$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_r = -\mu_1 c_1 u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$$

On définit r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse : $r = \frac{u_{r0}}{u_{i0}}$ et $t = \frac{u_{t0}}{u_{i0}}$.

Finalement, on a :

$$\begin{cases} \underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u}_r = r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \\ \underline{p}_r = -\mu_1 c_1 r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u}_t = t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \\ \underline{p}_t = \mu_2 c_2 t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \end{cases}$$

On écrit les conditions aux limites en $x = 0$: continuité de la vitesse particulière et de la surpression :

$$\begin{cases} \underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t) \\ \underline{p}_1(0, t) = \underline{p}_2(0, t) \end{cases}$$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t) \\ \underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) = \underline{p}_t(0, t) \end{cases}$$

Finalement, on obtient un système à deux équations et deux inconnues permettant de calculer r et t :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ \mu_1 c_1 - \mu_1 c_1 r = \mu_2 c_2 t \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \alpha t \end{cases}$$

On fait la somme des deux équations : $2 = t(1 + \alpha)$. D'où :

$$t = \frac{2}{1 + \alpha}$$

Comme $r = t - 1$, on en déduit : $r = \frac{2}{1 + \alpha} - 1$. Finalement, on a :

$$r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x$$



Il faut travailler en grandeurs réelles car on a le produit de deux grandeurs sinusoïdales.



On a alors : $\vec{\Pi}_i = \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x$.

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x > 0$.

Comme la moyenne de la fonction \cos^2 sur une période vaut $\frac{1}{2}$, on en déduit la moyenne du vecteur de Poynting sonore :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 S$$

Onde réfléchie :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde réfléchie est :

$$\vec{\Pi}_r = -p_r u_r \vec{u}_x$$

On a alors : $\vec{\Pi}_r = -\mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t + k_1 x) \vec{u}_x$.

Le signe - traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x < 0$.

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde réfléchie est :

$$\langle P_r \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 S$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x$$

On a alors : $\vec{\Pi}_t = \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_2 x) \vec{u}_x$.

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x > 0$.

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot (dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} (\alpha \mu_1 c_1) t^2 u_{i0}^2 S$$

On en déduit le coefficient de réflexion R en puissance moyenne :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = r^2$$

Le coefficient de transmission T en puissance moyenne est :

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \alpha t^2$$

On calcule la somme $R + T$:

$$R + T = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

En simplifiant, on a :

$$R + T = \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} = 1$$

Cette relation traduit la conservation de la puissance à la surface S d'abscisse $x = 0$: la puissance de l'onde incidente se répartit entre l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Cas particulier si $Z_{a2} \gg Z_{a1}$: on a $\alpha \gg 1$. On en déduit les expressions approchées de r et t : $r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \approx -1$ et $t = \frac{2}{1 + \alpha} \approx 0$. Ce cas correspond à la réflexion sur un mur. Toute la puissance de l'onde incidente est réfléchie. On vérifie que l'on a $R = 1$ et $T = 0$.

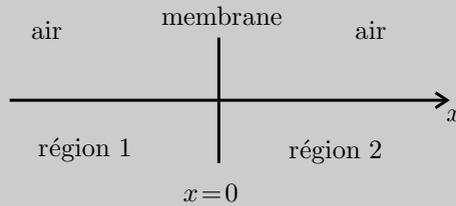
Exercice 23.3 : Transmission à travers une membrane* (PC-PSI)

On considère une membrane infiniment fine de masse surfacique σ . On note $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air et $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de l'air. L'impédance acoustique de l'air est $Z_a = \mu_0 c$.

Une onde acoustique se propage dans le sens des $x > 0$ dans la région 1. La surpression de l'onde incidente est $\underline{p}_i = p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$. Elle arrive à l'interface $x = 0$. On suppose que l'on a continuité de la vitesse particulière pour $x = 0$ et que la vitesse de la membrane est égale à la vitesse de l'onde transmise. On définit r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la surpression. On définit T le coefficient de transmission en puissance et $T_{\text{dB}} = 10 \log T$.

1. À cause de la membrane, on n'a pas continuité de la pression. Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la membrane en supposant qu'elle vibre en bloc. Déterminer \underline{r} et \underline{t} en fonction de ω, μ_0, c et σ .

2. Déterminer T le coefficient de transmission en puissance en fonction de ω et ω_0 . Exprimer ω_0 en fonction de μ_0 , c et σ .
3. Calculer σ pour atténuer de 70 dB un signal sinusoïdal de fréquence 2000 Hz.



Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique avec la transmission à travers une membrane. On pourra utiliser l'impédance acoustique en faisant attention au signe pour l'onde réfléchie.

La difficulté est d'écrire correctement les conditions aux limites en $x = 0$. L'énoncé donne les deux équations à écrire.



1. Onde incidente :

La surpression est :

$$\underline{p}_i = p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est : $Z_a = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_i = \frac{p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec $\omega = kc$.

Onde réfléchie :

La surpression est :

$$\underline{p}_r = r p_{i0} \exp(i(\omega t + kx))$$

L'impédance acoustique est : $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_a = -\mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_r = -\frac{r p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t + kx))$$

avec $\omega = kc$.

Onde transmise :

La surpression est :

$$\underline{p}_t = t p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est : $Z_a = \frac{P_{t0}}{u_{t0}} = \mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_t = \frac{t p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec $\omega = kc$.

Expressions de la surpression et de la vitesse particulière dans chaque milieu :

Dans le milieu 1, on a : $\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$.

Dans le milieu 2, on a : $\underline{u}_2 = \underline{u}_t$.

Continuité de la vitesse particulière pour $x = 0$:

$$\underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t)$$

On a donc :

$$\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t)$$

On obtient finalement :

$$1 - \underline{r} = \underline{t}$$



On peut être surpris de ne pas retrouver la relation rencontrée dans de nombreux exercices : $1 + \underline{r} = \underline{t}$. Ici, \underline{r} est le coefficient de réflexion en amplitude pour la surpression et non pour la vitesse particulière.



Théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

Bilan des actions :

- Forces de pression exercées par la région 1 :

$$\underline{p}_1 S \vec{u}_x = (\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t)) S \vec{u}_x$$

- Forces de pression exercées par la région 2 : $-\underline{p}_2 S \vec{u}_x = -(\underline{p}_t(0, t)) S \vec{u}_x$.

La masse de la membrane est $m = \sigma S$.

La membrane vibre en bloc d'après l'énoncé, on a :

$$\vec{v}_{\text{membrane}} = \underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t) = \underline{u}_t(0, t)$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

$$m \frac{d\vec{v}_{\text{membrane}}}{dt} = (p_1 - p_2) S \vec{u}_x$$

On a donc :

$$\sigma S \frac{d\underline{u}_t(0, t)}{dt} = (\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) - \underline{p}_t(0, t)) S$$

On en déduit :

$$\sigma \frac{t}{\mu_0 c} i \omega = (1 + \underline{r} - \underline{t})$$

Équations pour déterminer \underline{r} et \underline{t} :

$$\begin{cases} 1 - \underline{r} = \underline{t} \\ 1 + \underline{r} = \underline{t} \left(1 + i \frac{\sigma \omega}{\mu_0 c} \right) \end{cases}$$

On fait la somme des deux équations :

$$2 = \underline{t} \left(2 + i \frac{\sigma \omega}{\mu_0 c} \right)$$

On en déduit le coefficient de transmission en amplitude pour la surpression :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\sigma \omega}{2\mu_0 c}} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$.

Le coefficient de transmission est donc un filtre passe-bas du premier ordre.

On pose :

$$\underline{t} = t \exp(i\phi)$$

avec

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si la pulsation de l'onde incidente est trop grande, l'onde sonore ne traverse plus la membrane et toute la puissance de l'onde est réfléchi.

2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x = \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$



Il faut travailler en grandeurs réelles car on a le produit de deux grandeurs sinusoïdales.



La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x = \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx + \phi) \vec{u}_x$$

La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{t^2 p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le coefficient de transmission en puissance peut s'exprimer en décibels :

$$T_{\text{dB}} = 10 \log T = -10 \log \left(1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right)$$

On cherche à avoir $T_{\text{dB}} = -70$, soit :

$$70 = 10 \log \left(1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right)$$

On doit donc avoir :

$$1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = 10^7$$

Soit :

$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{10^7 - 1}}$$

D'après l'énoncé, $f = 2000$ Hz. On en déduit : $f_0 = 0,63$ Hz.

On a vu que :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{2\mu_0 c}{2\pi f_0} = 222 \text{ kg.m}^{-2}$$

Index

A

amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire 50

approximation acoustique 425

B

bilan thermodynamique 395, 400, 410

bornes homologues 226

C

condition de non basculement 27

conducteur parfait 96

corde de Melde 67

couche antireflet 132

couplage électromécanique parfait 198

D

débit massique 376

débit volumique 376

description d'Euler 365

description de Lagrange 365

diélectrique parfait LHI 117

E

écoulement incompressible 366

écoulement irrotationnel 366

écoulement parfait 366

écoulement stationnaire 366

effet de peau 135

équation d'Euler 385

équation de d'Alembert 67, 426

équation des télégraphistes 77

équations aux dérivées partielles 375

équations de Maxwell 92

F

formule de la diffraction 339

formule de Varignon 7

formule des interférences 308

H - I

hacheur 245, 249

incidence de Brewster 132

inductance mutuelle 225

inductance propre 225

induction de Lorentz 193

induction de Neumann 194

L

liaison pivot parfaite 3

ligne de courant 367

ligne équipotentielle 367

loi de Faraday 194

loi de Fick 278

loi de Fourier 256

loi de Lenz 192

loi de Newton 257
 loi des noeuds en termes de potentiels
 50

lois de Coulomb pour le frottement de
 glissement 23

lois de Descartes 116

M

mode propre 72

module d'Young 74

O

onde

stationnaire 70

transverse 69

onde plane progressive monochroma-
 tique 91

ordre d'interférence 308

P

plasma 142

potentiel des vitesses 367

potentiel thermodynamique 285, 289

principe d'Huygens-Fresnel 338

puissance thermique 256

R

rayonnement dipolaire 113

relation de dispersion 93

résistance thermique 260, 265, 269

ressort 11, 88

roulement sans glissement 29

T

théorème d'Ampère 178, 226

théorème de Gauss 161

théorème de Koenig 19

théorème de Malus 338

théorème de Millman 51

théorèmes de Bernoulli 381

transformateur 226

travail maximum récupérable 285, 290

V

vecteur de Poynting 94

vecteur rotation 16, 30, 36

viscosité 372

